

TEMA 2. MÉTODOS DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

ANÁLISIS NODAL

El objetivo del análisis nodal es encontrar los voltajes que hay en los distintos nodos:

1. **Seleccionar un nodo de referencia y asignar los voltajes $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$** al resto de nodos. Los voltajes se referenciarán con respecto al nodo de referencia y se asignarán en los puntos donde habrá cambios en el potencial.

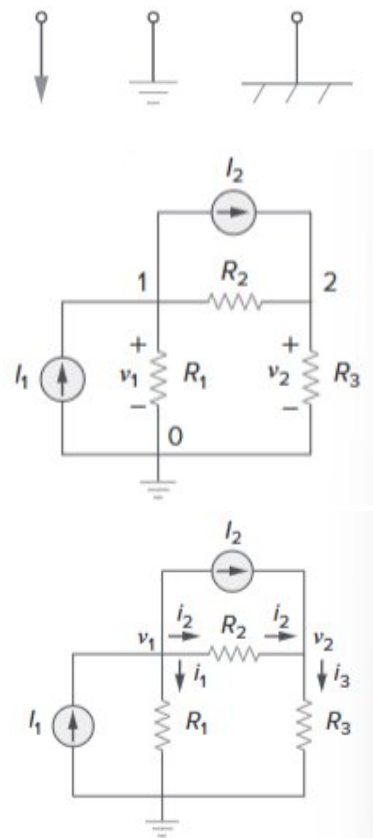
Normalmente tomaremos la tierra como referencia, puesto que el potencial es cero ($v = 0$). La tierra es representada por los siguientes símbolos comunes (por orden,

tierra común, tierra o tierra de chasis). Entonces, asignaremos los voltajes en los puntos donde el potencial aumenta, **en este caso, en los resistores R_1 y R_2** .

2. **Aplicar LCK** a cada uno de los nodos que no son de referencia. **Tenemos dos nodos, 1 y 2.** En el primero tendremos v_1 y en el segundo v_2 . Ahora, sabemos que, **en un resistor, la corriente fluye de un potencial mayor a uno menor**, por tanto, en el nodo 1 tenemos corriente que llega de la fuente I_1 y que se reparte hacia R_1, R_2 y I_2 : $I_1 = I_2 + i_1 + i_2$.

En el nodo dos tenemos la corriente que llega de la fuente I_2 y la resistencia R_2 y toda se va a través de R_3 : $I_2 + i_2 = i_3$.

Usaremos la Ley de Ohm para expresar las corrientes en términos de voltajes de nodo. **La ley de Ohm mide la caída de potencial que provoca el elemento.**



Entonces despejo i_1 , i_2 e i_3 , sabiendo que $i = \frac{v_{\text{mayor}} - v_{\text{menor}}}{R}$: $i_1 = \frac{v_1 - 0V}{R_1}$
, $i_1 = \frac{v_1 - v_2}{R_2}$ e $i_3 = \frac{v_2 - 0V}{R_3}$.

3. **Resolveremos las ecuaciones resultantes** para obtener los voltajes de nodo desconocidos.

Sabiendo lo que valen las corrientes en función de la tensión y habiéndolas despejado en las ecuaciones de LCK, resolvemos el sistema de ecuaciones con las técnicas aprendidas en *Análisis Matemático*.

ANÁLISIS NODAL CON FUENTES DE TENSIÓN

Sabiendo ya análisis nodal, estudiamos el caso particular en el que nos encontramos con fuentes de tensión en el circuito a analizar.

Dependiendo de cómo se encuentran conectadas las fuentes, distinguimos dos casos:

- **Caso 1 (el fácil):** la fuente de tensión está conectado entre el nodo de referencia y otro que no lo es.

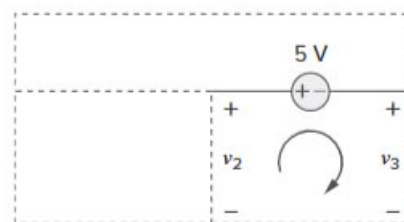
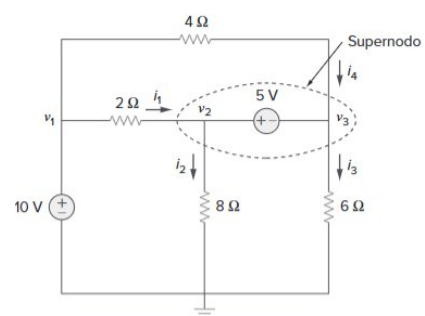
En nuestro ejemplo, la fuente de tensión de 10V, al estar conectado al nodo de referencia, establece 10V en v_1 .

- **Caso 2 (el complicado):** la fuente de tensión está conectado entre dos nodos que no son de referencia – forman un *nodo generalizado* o **supernodo**. En este caso, tendremos que recurrir a LVK para completar el análisis. Cabe notar que: un supernodo no tiene voltaje por sí mismo y que la fuente de voltaje en el interior de un supernodo nos da una ecuación (restricción) para determinar correctamente los voltajes del nodo.

El análisis nodal se realiza con total normalidad, como vimos en el apartado anterior. La única diferencia es que, como verás en la figura, hemos agrupado el nodo donde está v_2 y v_3 ,

los tratamos como un único nodo grande en el que entra i_1 e i_4 y sale i_2 e i_3 .

Ahora, para poder resolver el sistema de ecuaciones resultantes, nos faltará una ecuación que determinará la aportación de la fuente de tensión de 5V en el sistema. Aplicaremos LVK: hemos ocultado todo el circuito y nos centramos exclusivamente en la fuente de tensión y en la



caída de potencial de v_2 y v_3 . La fuente de tensión impone que, entre sus bornes, la caída de potencial sea de 5V, por tanto, aplicando LKV en sentido horario:

- El lazo sube desde tierra (0V) hasta v_2 : ganamos potencial (+ v_2).
- Cruza la fuente de tensión de + a -: perdemos potencial (- 5V).
- Bajamos desde v_3 hasta tierra (0V): perdemos potencial (- v_3).

Es decir, $5V + v_3 = v_2$, y esta es la última ecuación que nos permitirá resolver el sistema de ecuaciones.

ANÁLISIS DE MALLAS

El análisis nodal nos permitía calcular voltajes desconocidos en un circuito, mientras que el análisis de mallas nos permitirá calcular corrientes desconocidas.

Tiene sus beneficios, reduce el número de ecuaciones que tendremos que resolver para resolver el circuito. Un lazo es una trayectoria cerrada que no pasa por un nodo más de una vez y que una malla es un lazo que no contiene otro lazo dentro de sí.

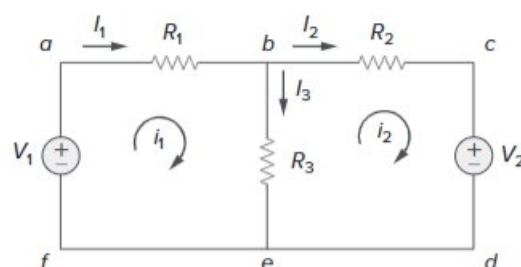
Sin embargo, solo se puede aplicar en los circuitos que son de **disposición plana**, es decir, que el circuito se pueda dibujar sin ramas que se cruce entre sí (en algunos casos, aunque haya ramas cruzándose, si redibujamos el circuito veremos que no es así).



Recomendación que nos dio nuestro profesor en su momento:
usa siempre el análisis nodal, es más fácil de ver = menos errores.

El principal error que se da al aplicar esta técnica es no comprender bien qué es una malla.

En el circuito de la derecha vemos 2 mallas: trayectorias $abefa$ y $bcdeb$. No es válida la trayectoria $abcdefa$ como malla, pues incluiría los dos lazos anteriores = no se cumple la definición de malla.



La corriente que circula por cada malla recibe el nombre de **corriente de malla** (creativos, ¿no?).

Para el análisis de mallas seguimos tres pasos:

1. **Asignar las corrientes de malla $i_1, i_2, \dots, i_n$ para las n mallas que tengamos.**

En nuestro caso tenemos dos mallas, pues i_1 e i_2 .

2. **Aplicaremos LK a cada una de las mallas**, usaremos la *ley de Ohm* para expresar los voltajes en función de las corrientes de malla.

En nuestro caso, para la malla de i_1 tenemos:

- Que el lazo sube por V_1 , vamos de $-$ a $+$: gano potencial ($- V_1$).
- Luego cruza el resistor R_1 por el que circula una corriente i_1 de mi malla: pierdo potencial (*Ley de Ohm*: $+ R_1 i_1 V$).
- Y bajo por el resistor R_3 , por el que circula la corriente i_1 hacia abajo y también la corriente i_2 hacia arriba ($i_1 - i_2$): pierdo potencial (*Ley de Ohm*: $+ R_2 (i_1 - i_2) V$).

LK para la malla 1 es: $R_1 i_1 + R_2 (i_1 - i_2) = V_1$. Para la malla de i_2 tenemos:

- Que el lazo sube por R_3 , por el que circula la corriente i_2 hacia arriba y la corriente i_1 hacia abajo: pierdo potencial (*Ley de Ohm*: $+ R_3 (i_3 - i_2) V$).
- Luego cruza el resistor R_2 por el que circula i_2 : pierdo potencial (*Ley de Ohm*: $+ R_2 i_2 V$).
- Finalmente llego a la fuente de tensión V_2 donde cruzo de $+$ a $-$: pierdo potencial ($+ V_2$).

Por tanto, la LK para la malla 2 es: $R_3 (i_3 - i_2) + R_2 i_2 + V_2 = 0$

Si te fijas, siempre que perdamos potencial $+$ y siempre que ganemos $-$.

3. **Resolvemos el sistema de ecuaciones y damos respuesta a las corrientes de rama.**

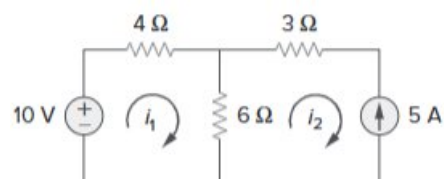
Al resolver el sistema de ecuaciones, tendremos que obtener las corrientes de malla i_1 e i_2 . Cuando las tengamos, tenemos que relacionar las corrientes de malla con las corrientes de rama (denotadas con las I mayúsculas). En nuestro ejemplo, $i_1 = I_1$, $i_2 = I_2$ e $i_1 - i_2 = I_3$.

*esta última es la resta de $i_1 - i_2$ y no al revés porque I_3 baja.

ANÁLISIS DE MALLAS CON FUENTES DE CORRIENTE

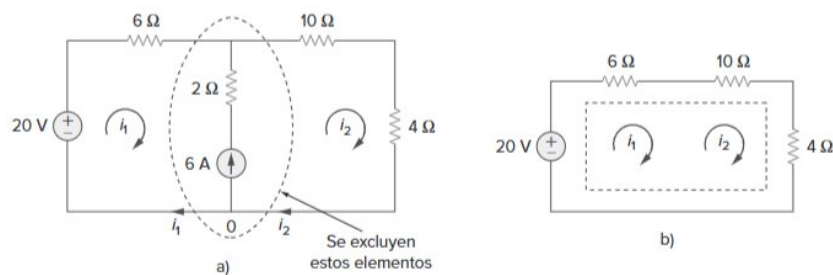
Es más sencillo de lo que parece. Distinguimos dos casos:

- **Caso 1 (el fácil):** si la fuente de corriente solo existe en una sola malla, resolveremos y escribiremos las ecuaciones de la forma habitual.



En este caso, $i_2 = -5A$. El resto se analiza como hemos aprendido.

- **Caso 2 (???)**: la fuente de corriente está compartida por dos mallas, entonces crearemos las... **supermallas**. En esencia, lo que haremos será excluir la fuente de corriente y cualquier elemento conectado en serie a ella (ver figura de ejemplo). Esto se debe porque, para aplicar LVK, necesitamos conocer las tensiones por todas las ramas, algo que inicialmente no conocemos con una fuente de corriente. Por tanto, creamos las supermallas para poder aplicar LVK. Sin embargo, nos faltarían expresiones para resolver el sistema de ecuaciones. En ese momento, aplicaremos LCK en cada rama donde se cruzan las dos mallas, para imponer las condiciones que hacen que el circuito opere.



Si el circuito tiene dos o más supermallas que se cruzan... ¡las combinaremos para hacer **hiper-mega-super-mallas** o **supermallas** más grandes!

De forma ejemplificada:

- Aplico LVK a la supermalla, por tanto:
 - Mi lazo sube por la fuente de tensión de 20V: gano potencial ($-20V$).
 - Avanza por el resistor de 6Ω: pierdo potencial (*Ley de Ohm*: $+6i_1 V$).
 - Avanzo por el resistor de 10Ω: pierdo potencial (*Ley de Ohm*: $+10i_2 V$).
 - Avanzo por el resistor de 4Ω: pierdo potencial (*Ley de Ohm*: $+4i_2 V$).
 LVK quedaría como: $20 = 6i_1 + 14i_2$.
- Aplico ahora LCK al nodo 0: entra i_2 y sale i_1 y 6A de la fuente de corriente, por tanto, la expresión quedaría como $i_2 = i_1 + 6$.
- Resolviendo el sistema tengo que $i_1 = -3.2A$ e $i_2 = 2.8A$.

PROPIEDAD DE LA LINEALIDAD

Las leyes de Kirchhoff son geniales para analizar los circuitos sin alterar su configuración original, sin embargo, en circuitos complejos la cosa puede complicarse demasiado.

Es por ello por lo que se han desarrollado algunos teoremas para simplificar la complejidad resultante de analizar estos circuitos, como los de Thevenin y Norton.

Estos teoremas se aplican solo a los circuitos lineales, es decir, aquellos que cumplen la **propiedad de linealidad**.

Definimos **linealidad** como propiedad de un elemento que describe una relación lineal entre causa y efecto.

¿Recuerdas cómo era la gráfica característica de corriente-voltaje de las resistencias ideales lineales? Era una línea recta que nos decía que, a medida que subía la corriente, también aumentaba la tensión necesaria para hacer frente a dicha resistencia.

La propiedad de homogeneidad establece que, si la entrada o *excitación* se multiplica por una constante, la salida o *respuesta* se multiplicará por la misma constante.

En el caso del resistor, con la *ley de Ohm* tenemos que $v = iR$. Si la corriente aumenta por una constante k , entonces la tensión se incrementa k veces: $kiR = kv$.

Por otro lado, la propiedad aditiva establece que la respuesta a una suma de entradas es la suma de las respuestas a cada entrada aplicada por separado.

Es decir, si $v_1 = i_1R$ y $v_2 = i_2R$, la aplicación de $i_1 + i_2$ da como resultado:

$$v = (i_1 + i_2)R = i_1R + i_2R = v_1 + v_2$$

Esta es la razón por la que decimos que los resistores son lineales, a causa de que la relación tensión-corriente satisface estas propiedades: homogeneidad y aditiva.

Decimos que un circuito es lineal si es tanto aditivo como homogéneo.

En la asignatura de Análisis de Circuitos **solemos** trabajar con circuitos lineales.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Si un circuito tiene dos o más fuentes independientes, podemos determinar el valor de una variable específica (tensión o corriente) aplicando los métodos de análisis que vimos previamente o determinando la contribución de cada fuente independiente a la variable y después sumarlas. Esto se llama como **superposición** y se basa directamente en la propiedad de la linealidad.

De ahí nace el concepto de **principio de superposición**: “Si sobre un sistema actúan simultáneamente un conjunto de entradas, la salida que se obtiene es la suma de las salidas que se obtendrían si cada una de las entradas actuase por separado, siendo nulas las demás”.

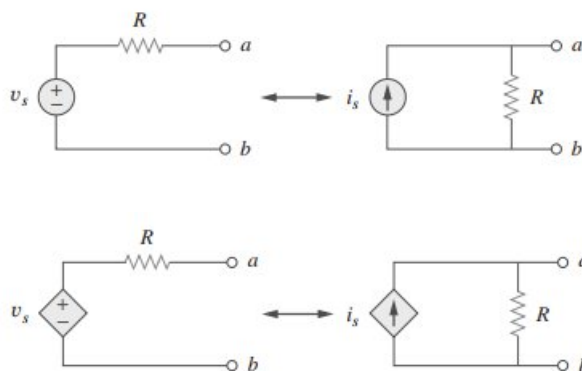
Es decir, cuando evaluamos las contribuciones, mantenemos una entrada activa y apagamos el resto (las fuentes de tensión se reemplazan por 0V - cortocircuito y las fuentes de corriente por 0A – circuito abierto). **¡No tocamos las fuentes dependientes!**

Si tienes que resolver un problema en el que te piden la potencia que absorbe una potencia, tienes que calcular la corriente o tensión a través del elemento aplicando la superposición y luego calcular la potencia. Esto es porque **¡la potencia no es lineal!**

TRANSFORMACIÓN DE FUENTES

La transformación de fuentes es una herramienta muy útil para simplificar los circuitos. Debemos tener en mente el concepto de **equivalencia**.

Decimos que **un circuito es equivalente a otro** si sus características de $v - i$ son idénticas a las del circuito original.



Definimos **transformación de fuentes** al proceso de reemplazar una fuente de tensión v_s en serie con un resistor R por una fuente de corriente i_s en paralelo con un resistor R y viceversa.

Tenemos que prestar especial atención a los siguientes aspectos:

- En el caso de las transformaciones con fuentes dependientes, tenemos que prestar especial atención a como manejamos la variable dependiente.
- La flecha de la fuente de corriente apunta hacia la terminal positiva de la fuente de tensión.
- La transformación de fuente de tensión a una de corriente no es posible si $R = 0$, en ese caso sería una fuente de tensión ideal.
- La transformación de fuente de corriente a una de tensión no es posible con $R = \infty$ no puede ser reemplazado por una fuente de tensión finita.

**más adelante veremos más sobre las fuentes de tensión/corriente ideales y no ideales.*

TEOREMA DE THEVENIN

En la práctica suele ocurrir que un elemento particular del circuito sea variable (suele ser la carga) mientras que los demás permanecen fijos.

Un ejemplo práctico podemos verlo en casa: cuando enchufamos algo (una lámpara o un ordenador, tú lo nombras), si analizásemos el circuito eléctrico de la casa, tendríamos que volver a analizarlo teniendo en cuenta la nueva carga que acabamos de añadir.



El ingeniero Léon Charles Thévenin creó un teorema, el **teorema de Thevenin**: *Cualquier circuito lineal de dos terminales puede reemplazarse por un circuito equivalente que consta de una fuente de tensión V_{Th} en serie con un resistor R_{Th} , donde la primera es la tensión de circuito abierto en las terminales y la segunda la entrada o resistencia equivalente en las terminales cuando las fuentes independientes se apagan.*

El cálculo de la tensión de Thévenin es trivial, dejamos el circuito abierto en los bornes y aplicamos métodos de análisis para obtener la tensión entre estas. Esa será nuestra V_{Th} .

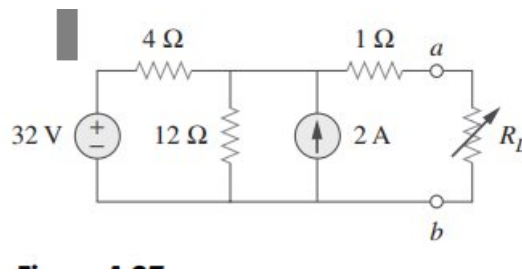
Para el cálculo de la resistencia de Thévenin, con los terminales del circuito en abierto, apagamos todas las fuentes independientes. La resistencia de entrada (o la equivalente) deben ser igual a R_{Th} . Partimos de la premisa de que el circuito original y el que estamos modificando para obtener los valores de Thévenin son equivalentes.

No obstante, para el cálculo de la resistencia tenemos que apreciar dos casos:

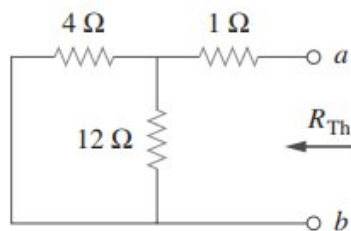
- Si no hay fuentes dependientes, se apagan todas las fuentes independientes, R_{Th} es la resistencia de entrada que aparece entre los bornes del circuito.
- Si hay fuentes dependientes, apagamos todas las fuentes independientes. A través de los bornes de entrada aplicaremos:
 - O una fuente de tensión v_0 con la que determinaremos la corriente resultante i_0 , y con la *ley de Ohm* tendremos que $R_{Th} = v_0/i_0$. Podemos usar, por ejemplo, $v_0 = 1V$ o simplemente no especificarlo.
 - O una fuente de corriente i_0 con la que determinaremos la tensión resultante v_0 para obtener con la *ley de Ohm* R_{Th} . Podemos usar, por ejemplo, $i_0 = 1A$ o simplemente no especificarlo.

Si te sale R_{Th} negativo no te preocupes, lo que significa es que es el circuito suministra potencia.

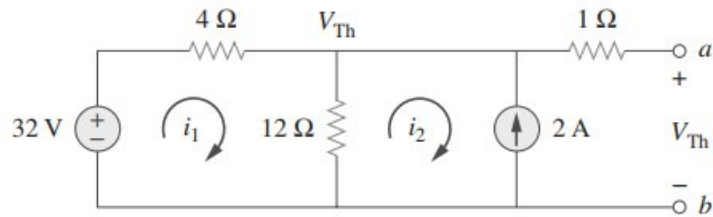
Si tuviéramos que calcular el equivalente de Thévenin al siguiente circuito:



Para R_{Th} , como no tenemos fuentes dependientes, simplemente apago todas las fuentes independientes.



Para V_{Th} , con la carga desconectada, calculo la tensión entre los bornes de entrada usando los métodos de análisis que hemos visto.



¿Por qué V_{Th} sale en el nodo que hay a la izquierda de $R = 1\Omega$? Esto se debe a que, el circuito estar abierto en los bornes a y b, no circulará ninguna corriente por dicho resistor. Por ende, V_{Th} aparece en el nodo central por que el resistor no influye en el cálculo de la tensión...

TEOREMA DE NORTON

El teorema de Norton establece que: *un circuito lineal de dos terminales puede remplazarse por un circuito equivalente que consta de una fuente de corriente I_N en paralelo con un resistor R_N donde la primera es la corriente de cortocircuito a través de las terminales y la última es la resistencia de entrada o resistencia equivalente en las terminales cuando las fuentes independientes están desactivadas.*

Si nos paramos a analizar el teorema, nos damos cuenta de que se cumple que la resistencia de Norton y la de Thévenin son... ¡iguales!

$$R_N = R_{Th}$$

Pero ¿sabes qué? ¡Hay otra relación entre los teoremas de Thévenin y Norton! La corriente de Norton la podemos calcular usando la Ley de Ohm. Conocemos la resistencia de entrada y también la tensión de entrada, por tanto, tenemos que:

$$I_N = V_{Th}/R_{Th}$$

Para calcular la corriente de Norton sin recurrir a la relación entre los teoremas, debes saber que las fuentes dependientes e independientes se tratan igual que en teorema de Thévenin.