

Relación de Problemas. Temas 2, 3 y 4

Relación 2: Procesos aleatorios

- 1) Sea un proceso aleatorio definido por $X(t) = U \cos(t) + V \sin(t)$, $-\infty < t < \infty$ donde U y V son dos variables aleatorias discretas, idénticas e independientes que pueden tomar los valores -2 y 1 con probabilidades $1/3$ y $2/3$, respectivamente. ¿Es $X(t)$ un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio?

- 2) Se define un proceso aleatorio $X(t)$ como:

$$X(t) = Y + (1 - t) \quad (1)$$

donde Y es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0,1)$.

- a) Determine la $P(X(3) > -4/3)$.
- b) Calcule la media de $X(t)$, $m_X(t)$, y la covarianza de $X(t)$, $C_X(t_1, t_2)$.

- 3) Sea el siguiente proceso aleatorio

$$Y(t) = At + B \quad (2)$$

donde A y B son dos variables aleatorias discretas (A, B) con una pmf (función masa de probabilidad) conjunta dada por

$$P(A = a, B = b) = \frac{a}{20}, \quad a \in \{1, 2, 3\}, b \in \{1, \dots, a + 1\} \quad (3)$$

- a) Determine la media del proceso $Y(t)$.
- b) Determine la autocorrelación y la autocovarianza del proceso $Y(t)$.
- c) ¿Es $Y(t)$ estacionario en sentido amplio? Justifique su respuesta.

- 4) Sea (A, B) una variable aleatoria bidimensional con distribución Gaussiana cuyo vector de medias es $(1, 1)$ y su matriz de covarianzas es:

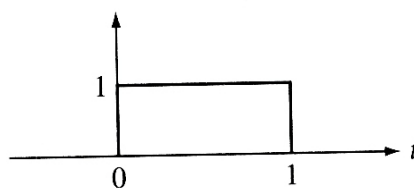
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Se construye el proceso aleatorio $X(t) = A \cos(t) + B$.

- a) Determine la media y la varianza del proceso aleatorio $X(t)$.
- b) La función de autocorrelación del proceso aleatorio $X(t)$.

- 5) Sean dos procesos aleatorios independientes entre sí, discretos en el tiempo y ambos de media constante. La media del proceso $X(n)$ es $m_X = 1/\sqrt{2}$ y la del proceso $Y(n)$ es $m_Y = 2$. La función de autocorrelación del proceso $X(n)$ viene dada por $R_X(k) = (1/2)^k$ y la del proceso $Y(n)$ por $R_Y(k) = (1/3)^k$. Sea $Z(n)$ un nuevo proceso aleatorio dado por $Z(n) = X(n) + Y(n)$. Determine

- a) Determine la media y la función de autocovarianza del proceso $Z(n)$.
 - b) Determine la potencia promedio del proceso $Z(n)$.
 - c) Al realizar un muestreo de orden uno del proceso aleatorio $X(n)$ obtenemos una variable aleatoria continua con una función densidad de probabilidad exponencial ($f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $0 \leq x < \infty$, $\lambda > 0$). Determine el valor de λ .
- 6) Sea $X(t)$ un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio y con una función de autocorrelación $R_X(\tau) = e^{-a|\tau|}$ donde $a > 0$ es una constante. Generamos un nuevo proceso aleatorio $Y(t)$ de la siguiente forma $Y(t) = X(t)\cos(w_0 t + \phi)$, donde w_0 es una constante y ϕ es una variable aleatoria uniforme sobre el intervalo $(-\pi, \pi)$ y estadísticamente independiente de $X(t)$. Determine la función de autocorrelación de $Y(t)$.
- 7) Sean $X(t)$ e $Y(t)$ dos procesos aleatorios Gaussianos independientes entre sí, ambos de media cero y la misma función de covarianza $C(t_1, t_2)$. Vamos a definir el siguiente proceso aleatorio $Z(t) = X(t)\cos(\omega t) + Y(t)\sin(\omega t)$, $-\infty < t < \infty$. Determine la media y la autocovarianza de $Z(t)$.
- 8) Un proceso aleatorio está definido por $X(t) = X_0 + Vt$ donde X_0 y V son dos variables aleatorias. Sabemos que el valor esperado de X_0 es 2, el valor esperado de V es 3, la varianza de X_0 es 25 y la varianza de V es 16. También conocemos la correlación de las dos variables X_0 y V que vale 9. Determine:
- a) El valor esperado de $X(t)$.
 - b) La autocorrelación de $X(t)$.
 - c) La autocovarianza de $X(t)$.
 - d) ¿Es $X(t)$ un proceso estacionario en sentido amplio?.
- 9) Sea $g(t)$ el pulso rectangular que se muestra en la figura. El proceso aleatorio $X(t)$ se define como $X(t) = Ag(t)$ donde A es una variable aleatoria discreta que toma valores $+1$ o -1 con la misma probabilidad.



Determine:

- a) La pmf conjunta (función masa de probabilidad conjunta) de $X(t)$ y $X(t + d)$.
 - b) La función de autocovarianza $C_X(t, t + d)$, $d > 0$.
- 10) Sean $X(t)$ e $Y(t)$ dos procesos aleatorios, independientes y estacionarios en sentido amplio, con media cero y la misma covarianza $C_X(\tau) = 4 * e^{-|\tau|}$. Se define el proceso $Z(t)$ como $Z(t) = 3 * X(t) - 5 * Y(t)$. Determine:
- a) Determinar si $Z(t)$ es estacionario en sentido amplio.

- b) Determinar la pdf de $Z(t)$ si $X(t)$ e $Y(t)$ son conjuntamente gaussianos con media zero y covarianza $C_X(\tau) = 4 * e^{-|\tau|}$. Ayuda: la combinación lineal de transformaciones lineales de procesos conjuntamente gaussianos origina procesos gaussianos.
- c) Encontrar la pdf conjunta de $Z(t_1)$ y $Z(t_2)$ en el apartado b).
- d) Encontrar la covarianza cruzada entre $Z(t)$ y $X(t)$.

11) Sean $Z_1, Z_2, \dots$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $P[Z_n = 1] = p$ y $P[Z_n = -1] = q = 1 - p$. Sea $X_n = \sum_{i=1}^n Z_i$, $n = 1, 2, \dots$ donde $X_0 = 0$. El conjunto de variables aleatorias $\{X_n, n \geq 0\}$ es un proceso aleatorio denominado *simple random walk* $X(n)$ en una dimensión.

- a) ¿Qué tipo de proceso aleatorio es?
- b) Genere una realización del proceso aleatorio
- no idea → c) Determine la función masa de probabilidad (pmf) de primer orden ($p_n(k) = P[X_n = k]$) de este proceso aleatorio.

12) En un sistema de comunicaciones se utiliza la siguiente señal aleatoria $Y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$, donde A es una variable aleatoria que sigue un modelo de Bernoulli con parámetro p , ϕ es otra variable aleatoria independiente de A y uniforme en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y ω es una constante conocida.

- a) Determine la media del proceso aleatorio $Y(t)$.
- b) Obtenga la función de autocorrelación del proceso $Y(t)$.
- c) ¿Es $Y(t)$ un proceso estacionario en sentido amplio?
- d) Averigüe si el proceso $Y(t)$ es ergódico en la media o ergódico en la autocorrelación.

13) El proceso aleatorio $Z(t)$ tiene la siguiente descripción analítica

$$Z(t) = X \cos(2\pi f_0 t) + Y \sin(2\pi f_0 t) \quad (5)$$

donde X es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(-1, 1)$, e Y es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Además, X e Y son independientes. Calcule:

- a) La media $m_Z(t)$
- b) La función de autocorrelación $R_Z(t, t + \tau)$. ¿Es un proceso estacionario en sentido amplio?
- b) La potencia media del proceso P_Z .

14) Sea el proceso aleatorio $X(t)$ de media cero y cuya función de autocorrelación viene dada por $R_X(t, t + \tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$ con $\lambda > 0$. Determine la densidad de potencia espectral del proceso aleatorio $X(t)$.

15) Determine la densidad de potencia espectral $S_X(w)$ del proceso aleatorio $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$, donde A y ω_0 son constantes y ϕ es una variable aleatoria uniforme sobre $(-\pi, \pi)$.

16) Sea $X(t)$ un proceso aleatorio de media constante y función de autocorrelación $R_X(\tau) = B e^{-\tau^2/2a^2}$ donde $B > 0$ y $a > 0$ son constantes. Determine:

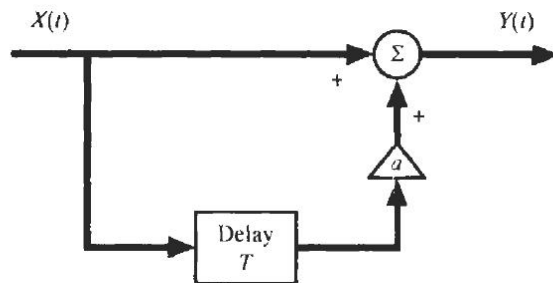
- a) La densidad de potencia espectral S_X .
 - b) La potencia promedio P_X .
- 17) Sea $D_n = X_n - X_{n-d}$, donde d es una constante y X_n es un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio y de media cero.
- a) Determine $R_D(k)$ y $S_D(f)$ en función de $R_X(k)$ y $S_X(f)$.
 - b) Determine $E[D_n^2]$.
- 18) Sea $X(t)$ un proceso aleatorio Gaussiano estacionario en sentido amplio con una media $E[X(t)] = 4$ y con una función de autocorrelación $R_X(\tau) = 25e^{-3|\tau|} + 16$. Determine:
- a) La función densidad de probabilidad conjunta de las tres variables aleatorias resultantes del muestreo del proceso aleatorio en los instantes de tiempo t_i ($X(t_i), i = 1, 2, 3$) con $t_i = t_0 + [(i - 1)/2]$, donde t_0 es una constante.
 - b) La densidad de potencia espectral S_X .
 - c) La potencia promedio P_X .
- 19) Sea un proceso aleatorio $Y(t) = AX(t)$ donde $X(t)$ es un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio y A es una variable aleatoria independiente de $X(t)$ que toma valores 1 y -1 con la misma probabilidad. Obtenga la densidad de potencia espectral del proceso $Y(t)$, $S_Y(w)$, en función de la densidad de potencia espectral del proceso $X(t)$, $S_X(w)$.
- 20) Sea un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta impulso viene dada por $h(t) = 4e^{-2t}u(t)$, donde $u(t)$ es la función escalón, y supongamos que tiene como entrada un proceso $X(t)$ estacionario en sentido amplio con media $m_X = 2$. Determine la media del proceso aleatorio de salida.
- 21) La entrada de un filtro es un ruido blanco de media cero y densidad de potencia espectral $N_0/2$. El filtro tiene una función de transferencia dada por

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f}$$

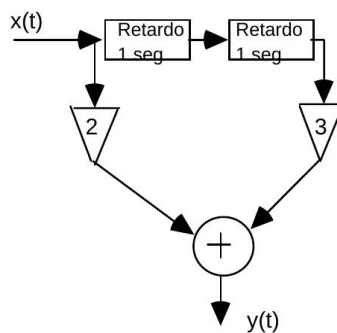
Determine:

- a) $S_{Y,X}(f)$ y $R_{Y,X}(\tau)$.
- b) $S_Y(f)$ y $R_Y(\tau)$.
- c) ¿Cuanto vale la potencia promedio del proceso de salida?

- 22) Sea la entrada al siguiente filtro un ruido blanco con densidad de potencia espectral σ^2 . Determine la densidad de potencia espectral de $Y(t)$.



- 23) Sea el siguiente sistema, donde la entrada $x(t)$ es un proceso aleatorio estacionario



- a) Determine la función de autocorrelación del proceso de salida $y(t)$ en función de la autocorrelación del proceso de entrada $x(t)$.
 - b) Determine la densidad de potencia espectral de la salida si la autocorrelación del proceso de entrada viene dada por $R_X(\tau) = \frac{4e^{-|\tau|}}{3}$.
 - c) El sistema propuesto se puede considerar un filtro lineal invariante con el tiempo. Obtenga el módulo de la respuesta en frecuencia del sistema a partir de la densidad de potencia espectral de la salida y de la entrada del sistema.
 - d) Sea la autocorrelación del proceso de entrada $x(t)$ la indicada en el apartado b). Al realizar un muestreo de orden uno del proceso aleatorio $x(t)$ obtenemos una variable aleatoria continua uniforme en el intervalo $[-a, a]$. Determine el valor de a .
- 24) Sea $X(t)$ un proceso Gaussiano estacionario en sentido amplio de media cero con función de autocorrelación dada por $R_X(\tau) = 8\text{sinc}(4\tau)$ que es la entrada a un filtro lineal (todo filtro lineal es una transformación lineal) caracterizado por

$$|H(f)| = \begin{cases} 2 & |f| \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6)$$

- a) Determine la función de autocorrelación del proceso de salida $Y(t)$.
- b) Determine la probabilidad $P(Y(2) < 1)$.

- 1) Sea un proceso aleatorio definido por $X(t) = U \cos(t) + V \sin(t)$, $-\infty < t < \infty$ donde U y V son dos variables aleatorias discretas, idénticas e independientes que pueden tomar los valores -2 y 1 con probabilidades $1/3$ y $2/3$, respectivamente. ¿Es $X(t)$ un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio?

$$X(t) = U \cos(t) + V \sin(t), \quad -\infty < t < \infty$$

U y V procesos independientes / discretos / idénticos

$$P(X=-2) = 1/3 \quad P(X=1) = 2/3$$

¿Es WSS? $\rightarrow$ se debe cumplir que $\begin{cases} m_X = \text{cte.} \\ R_X(t, t+\tau) = R(\tau) \end{cases}$

* Calculo $m_X = E[X(t)] = E[U \cos(t) + V \sin(t)] =$

$$E[U] \cos(t) + E[V] \sin(t) = \boxed{0 = m_X}$$

$$E[U] = \sum u_i P(U=u_i) = 0 \quad E[V] = E[U] = 0$$

* Compruebo que $R_X(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] =$
 $E\{U \cos(t) + V \sin(t)\} \{U \cos(t+\tau) + V \sin(t+\tau)\} =$

$$= E[U^2 \cos(t) \cos(t+\tau) + UV \cos(t) \sin(t+\tau) + VU \sin(t) \cos(t+\tau) + V^2 \sin(t) \sin(t+\tau)]$$

$$= E[U^2] \cos(t) \cos(t+\tau) + E[UV] \cos(t) \sin(t+\tau) + E[VU] \sin(t) \cos(t+\tau) + E[V^2] \sin(t) \sin(t+\tau) =$$

$\uparrow$

$$E[U^2] = \sum u_i^2 P(U=u_i) = \frac{6}{3} = 2$$

$$E[U^2] = E[V^2]$$

$$E[UV] = E[U] \cdot E[V] = 0$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$= 2 \cos(t) \cos(t+\tau) + 2 \sin(t) \sin(t+\tau) = 2 \cos(t - (t+\tau)) = 2 \cos(-\tau) = 2 \cos(\tau)$$

R_X solo depende de τ , entonces, $X(t)$ es WSS.

2) Se define un proceso aleatorio $X(t)$ como:

$$X(t) = Y + (1 - t)$$

donde Y es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0,1)$.

a) Determine la $P(X(3) > -4/3)$.

b) Calcule la media de $X(t)$, $m_X(t)$, y la covarianza de $X(t)$, $C_X(t_1, t_2)$.

$$X(t) = Y + (1 - t) \rightarrow Y \text{ es U.A. uniforme en } (0,1).$$

$$A) \text{ Determinar } P(X(3) > -4/3) \Rightarrow X(3) = Y + (1 - 3) = Y - 2.$$

$$Y - 2 > -4/3 \Leftrightarrow Y > \frac{2}{3}.$$

$$P(X(3) > -4/3) = P(Y > \frac{2}{3}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Calculo la pdf de Y : $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{1-0} = 1 & \text{en } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \rightarrow P(Y > y) = \int_y^1 f_Y(x) dx = x \Big|_y^1$

$$P(Y > \frac{2}{3}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

B) Determinar m_X y $C_X(t_1, t_2)$

$$m_X = E[X(t)] = E[Y + (1 - t)]$$

$$\text{Calculo } E[Y] = \int_0^1 y f_Y(y) dy = \int_0^1 y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = 0.5$$

$$C_X(t_1, t_2) = E[\underbrace{\{X(t_1) - m_X(t_1)\} \{X(t_2) - m_X(t_2)\}}_{Y + (1 - t_1) - [E[Y] + (1 - t_1)] \Leftrightarrow Y - E[Y]}] =$$

$$Y + (1 - t_1) - [E[Y] + (1 - t_1)] \Leftrightarrow Y - E[Y]$$

$$= E[\{Y - E[Y]\} \{Y - E[Y]\}] = E[(Y - E[Y])^2] = \underbrace{E[Y^2]} - (E[Y])^2 =$$

$$* E[Y^2] = \int_0^1 y^2 f_Y(y) dy = \int_0^1 y^2 dy = \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = C_X(t_1, t_2)$$

3) Sea el siguiente proceso aleatorio

$$Y(t) = At + B \quad (2)$$

donde A y B son dos variables aleatorias discretas (A, B) con una pmf (función masa de probabilidad) conjunta dada por

$$P(A = a, B = b) = \frac{a}{20}, \quad a \in \{1, 2, 3\}, b \in \{1, \dots, a+1\} \quad (3)$$

- a) Determine la media del proceso $Y(t)$.
- b) Determine la autocorrelación y la autocovarianza del proceso $Y(t)$.
- c) ¿Es $Y(t)$ estacionario en sentido amplio? Justifique su respuesta.

Info que tengo

$$Y(t) = At + B$$

A y B discretas

p.m.f. conjunta:

$$P(A=a, B=b) = \frac{a}{20} \quad a \in \{1, 2, 3\}, b \in \{1, \dots, a+1\}$$

con $a=1$, tengo las parejas $(1,1)$ y $(1,2) \rightarrow$ probabilidad $\frac{1}{20}$ $\left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Probabilidades} \\ \text{es igual a 1?} \end{array} \right.$

con $a=2$, tengo $(2,1), (2,2), (2,3) \rightarrow \frac{2}{20}$

con $a=3$, tengo $(3,1), (3,2), (3,3), (3,4) \rightarrow \frac{3}{20}$

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \frac{1}{20} + 3 \cdot \frac{2}{20} + 4 \cdot \frac{3}{20} = \\ & = \frac{2+6+12}{20} = \frac{20}{20} = 1 \end{aligned}$$

A) Media de Y :

$$m_Y = E[Y] = E[At + B] = E[A]t + E[B] = 2.5t + 2.25$$

* Calculamos $E[A]$:

$$\sum a \cdot P(A=a) = 1 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{20}\right) + 2 \cdot \left(3 \cdot \frac{2}{20}\right) + 3 \cdot \left(4 \cdot \frac{3}{20}\right) = \frac{30}{20} = 2.5$$

↓
2 parejas con $a=1$: $(1,1), (1,2)$

* Calculamos $E[B]$:

$$\sum b \cdot P(B=b) = 1 \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{3}{20}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{3}{20}\right) + 3 \cdot \left(\frac{2}{20} + \frac{3}{20}\right) + 4 \cdot \left(\frac{3}{20}\right) = \frac{45}{20} = 2.25$$

B) AUTOCORRELACIÓN Y AUTOCOVARIANZA DE $Y(t)$:

$$R_Y(t_1, t_2) = E[Y(t_1)Y(t_2)] = E\{At_1 + B\{At_2 + B\} = E[A^2t_1t_2 + ABt_1 + ABt_2 + B^2] =$$

$$= E[A^2]t_1t_2 + E[AB](t_1 + t_2) + E[B^2] = 6.7t_1t_2 + 5.85(t_1 + t_2) + 6.15$$

* Calwlo $E[A^2]$, $E[AB]$ y $E[B^2]$

$$E[A^2] = \sum a \cdot P(A=a) = 1^2 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{20}\right) + 2^2 \cdot \left(3 \cdot \frac{2}{20}\right) + 3^2 \cdot \left(4 \cdot \frac{3}{20}\right) = \frac{134}{20} = 6,7$$

$$E[B^2] = \sum b \cdot P(B=b) = 1 \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{3}{20}\right) + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{3}{20}\right) + 3^2 \cdot \left(\frac{2}{20} + \frac{3}{20}\right) + 4^2 \cdot \left(\frac{3}{20}\right) = \frac{123}{20} = 6,15$$

$$E[AB] = \sum a b P(A=a, B=b) = 1 \cdot 1 \cdot P(A=1, B=1) + \dots + 3 \cdot 4 \cdot P(A=3, B=4) = \frac{117}{20} = 5,85$$

$$C_Y(t_1, t_2) = R_Y(t_1, t_2) - m_Y(t_1) m_Y(t_2) =$$

$$6,7 t_1 t_2 + 5,85(t_1 + t_2) + 6,15 - \underbrace{(2,5 t_1 + 2,25)(2,5 t_2 + 2,25)}_{2,5^2 t_1 t_2 + (2,5)(2,25)(t_1 + t_2) + 2,25^2} =$$

$$= 0,45 t_1 t_2 + 0,225(t_1 + t_2) + 1,0875$$

c) ¿Es WSS? No: * m_Y depende del tiempo

* R_Y y C_Y no se puede escribir solo en función de $t_2 - t_1$.

Alfonso

- 4) Sea (A, B) una variable aleatoria bidimensional con distribución Gaussiana cuyo vector de medias es $(1, 1)$ y su matriz de covarianzas es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Se construye el proceso aleatorio $X(t) = A \cos(t) + B$.

- Determine la media y la varianza del proceso aleatorio $X(t)$.
- La función de autocorrelación del proceso aleatorio $X(t)$.

Info que tengo

ⓘ Revisa el documento PDF sobre V.a.m. Gaussianas en PRADO.

$$\left. \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\} \text{V.a. Gaussianas} \left\{ \begin{matrix} E[A] = 1; \text{VAR}[A] = 2 \\ E[B] = 1; \text{VAR}[B] = 2 \\ \text{COVAR}[A, B] = 1 \end{matrix} \right\} \text{ Toda esta info me la ha dado el enunciado}$$

$$X(t) = A \cos(t) + B$$

$$A) E[X(t)] = E[A] \cos(t) + E[B] = \cos(t) + 1;$$

$$\text{VAR}[X(t)] = \text{VAR}[A \cos(t) + B] = \cos^2(t) \text{VAR}(A) + \text{VAR}(B) + 2 \cos(t) \text{COVAR}(A, B) = 2(\cos^2(t) + \cos(t) + 1)$$

$$\begin{aligned} B) R_X(t, t+\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = E[(A \cos(t) + B)(A \cos(t+\tau) + B)] = \\ &= E[A^2 \cos(t) \cos(t+\tau) + AB \cos(t) + AB \cos(t+\tau) + B^2] = \\ &= E[A^2] \cos(t) \cos(t+\tau) + E[AB](\cos(t) + \cos(t+\tau)) + E[B^2] = \end{aligned}$$

* Sabemos que $\text{VAR}[A] = \text{VAR}[B] = 2$ y como

$\text{VAR}[X] = R_X(\tau) + m_X^2$, y $R_X(\tau) = E[X^2]$ tengo que de $\text{VAR}[A]$ despejo $E[A^2]$:

$$\text{VAR}[A] = E[A^2] - E[A]^2 \Rightarrow E[A^2] = \text{VAR}[A] + E[A]^2 = 3$$

$$\text{VAR}[B] = E[B^2] - E[B]^2 \Rightarrow E[B^2] = \text{VAR}[B] + E[B]^2 = 3$$

* También sabemos que $\text{COVAR}(A, B) = 1$ y que,

$$\text{COVAR}(A, B) = \text{CORR}(A, B) - E[A]E[B] \Rightarrow \text{despejo } E[AB] = \text{COVAR}(A, B) + E[A]E[B] = 2$$

$$\uparrow \\ E[AB]$$

$$= 3 \cos(t) \cos(t+\tau) + 2(\cos(t) + \cos(t+\tau)) + 3 = R_X(t, t+\tau)$$

- 5) Sean dos procesos aleatorios independientes entre sí, discretos en el tiempo y ambos de media constante. La media del proceso $X(n)$ es $m_X = 1/\sqrt{2}$ y la del proceso $Y(n)$ es $m_Y = 2$. La función de autocorrelación del proceso $X(n)$ viene dada por $R_X(k) = (1/2)^k$ y la del proceso $Y(n)$ por $R_Y(k) = (1/3)^k$. Sea $Z(n)$ un nuevo proceso aleatorio dado por $Z(n) = X(n) + Y(n)$. Determine

Handwritten signature

- a) Determine la media y la función de autocovarianza del proceso $Z(n)$.
- b) Determine la potencia promedio del proceso $Z(n)$.
- c) Al realizar un muestreo de orden uno del proceso aleatorio $X(n)$ obtenemos una variable aleatoria continua con una función densidad de probabilidad exponencial ($f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $0 \leq x < \infty$, $\lambda > 0$). Determine el valor de λ .

Info que tengo

X e Y independientes, discretos, media cte. $\left. \begin{array}{l} m_X = 1/\sqrt{2} \\ m_Y = 2 \end{array} \right\}$

$$R_X(k) = (1/2)^k \quad R_Y(k) = (1/3)^k$$

$Z(n) = X(n) + Y(n)$ y es WSS por que las medias de las v.a. son cte. y sus respectivas funciones de autocorrelación no dependen del tiempo.

$$A) m_Z = E[Z(n)] = E[X(n) + Y(n)] = E[X(n)] + E[Y(n)] = 1/\sqrt{2} + 2 = 2.707$$

$$C_Z(n, n+k) = C_X(n, n+k) + C_Y(n, n+k) \Rightarrow \text{Como es WSS, } C_Z \text{ solo depende de } k.$$

$$C_Z(k) = C_X(k) + C_Y(k) = \{R_X(k) - m_X^2\} + \{R_Y(k) - m_Y^2\} = (1/2)^k + (1/3)^k - 4.5$$

B) Potencia promedio de Z .

$$\text{Como es WSS, } P_Z = R_Z(0) = (1/2)^0 + (1/3)^0 + 2\sqrt{2} = 2(1 + \sqrt{2}) = P_Z$$

$$\begin{aligned} R_Z(k) &= R_Z(n, n+k) = E[Z(n)Z(n+k)] = E[(X(n) + Y(n))(X(n+k) + Y(n+k))] = \\ &= E[X(n)X(n+k) + X(n)Y(n+k) + Y(n)X(n+k) + Y(n)Y(n+k)] = \\ &= E[X(n)X(n+k)] + E[X(n)Y(n+k)] + E[Y(n)X(n+k)] + E[Y(n)Y(n+k)] = \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X \text{ e } Y \text{ independientes, es decir: } E[XY] = E[X]E[Y]:$$

$$= R_X(n, n+k) + E[X(n)]E[Y(n+k)] + E[Y(n)]E[X(n+k)] + R_Y(n, n+k) =$$

$$\Rightarrow Z(n) \text{ es WSS y } E[X(\dots)] = m_X; E[Y(\dots)] = m_Y:$$

$$= R_X(k) + m_X m_Y + m_X m_Y + R_Y(k) =$$

$$= R_X(k) + R_Y(k) + 2m_X m_Y =$$

$$= (1/2)^k + (1/3)^k + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(2) = (1/2)^k + (1/3)^k + 2\sqrt{2}$$

$$c) \quad X(n) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & 0 \leq x \leq +\infty, \lambda > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Alum

$$m_x = E[X(n)] = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{2}$$

6) Sea $X(t)$ un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio y con una función de autocorrelación $R_X(\tau) = e^{-a|\tau|}$ donde $a > 0$ es una constante. Generamos un nuevo proceso aleatorio $Y(t)$ de la siguiente forma $Y(t) = X(t)\cos(\omega_0 t + \phi)$, donde ω_0 es una constante y ϕ es una variable aleatoria uniforme sobre el intervalo $(-\pi, \pi)$ y estadísticamente independiente de $X(t)$. Determine la función de autocorrelación de $Y(t)$.

Atu

$X(t)$ es WSS con $R_X(\tau) = e^{-a|\tau|}$ $a > 0$

$Y(t) = X(t)\cos(\omega_0 t + \phi)$, ω_0 cte y ϕ v.a. uniforme en $(-\pi, \pi)$
indep de $X(t)$

→ Nos piden R_Y :

$$R_Y(t, t+\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)] = E[(X(t)\cos(\omega_0 t + \phi))(X(t+\tau)\cos(\omega_0(t+\tau) + \phi))] =$$

$$= E[X(t)X(t+\tau)\cos(\omega_0 t + \phi)\cos(\omega_0(t+\tau) + \phi)] =$$

$$= R_X(\tau) E\left[\frac{1}{2}(\cos(-\omega_0 \tau) + \cos(2\omega_0 t + 2\phi + \omega_0 \tau))\right] =$$

$$= \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos(-\omega_0 \tau) + \frac{1}{2} E[\cos(2\omega_0 t + 2\phi + \omega_0 \tau)] = \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos(\omega_0 \tau) =$$

$$\textcircled{*} \text{ pdf de } \phi = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -\pi < \phi < \pi \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$\textcircled{*} E[\cos(2\omega_0 t + 2\phi + \omega_0 \tau)] = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(2\omega_0 t + 2\phi + \omega_0 \tau) d\phi = 0$$

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} e^{-a|\tau|} \cos(\omega_0 \tau)$$

7) Sean $X(t)$ e $Y(t)$ dos procesos aleatorios Gaussianos independientes entre sí, ambos de media cero y la misma función de covarianza $C(t_1, t_2)$. Vamos a definir el siguiente proceso aleatorio $Z(t) = X(t)\cos(\omega t) + Y(t)\sin(\omega t)$, $-\infty < t < \infty$. Determine la media y la autocovarianza de $Z(t)$.

Atun

Info que tengo

X e Y son independientes.

$E[X] = E[Y] = 0 \rightarrow$ media nula.

$C_X(t, t+\tau) = C_Y(t, t+\tau) = C(t, t+\tau) \rightarrow$ comparten misma función de autocovarianza.

$$Z(t) = X(t)\cos(\omega t) + Y\sin(\omega t)$$

A) la media de $Z(t)$ es sencillo. Como la esperanza matemática es lineal, tengo que...

$$E[Z(t)] = E[X(t)\cos(\omega t) + Y(t)\sin(\omega t)] = 0$$

B) la autocovarianza viene dado por:

$$C_Z(t, t+\tau) = R_Z(t, t+\tau) - \cancel{m_Z(t)m_Z(t+\tau)}^0 = R_Z(t, t+\tau) = C(t, t+\tau)\cos(\omega\tau)$$

$$\begin{aligned} * R_Z(t, t+\tau) &= E[Z(t)Z(t+\tau)] = E[(X\cos(\omega t) + Y\sin(\omega t))(X\cos(\omega(t+\tau)) + Y\sin(\omega(t+\tau)))] = \\ &= E[X^2\cos(\omega t)\cos(\omega(t+\tau)) + XY(\cos(\omega t)\sin(\omega(t+\tau)) + \cos(\omega(t+\tau))\sin(\omega t)) + Y^2\sin(\omega t)\sin(\omega(t+\tau))] = \\ &= E[X^2]\cos(\omega t)\cos(\omega(t+\tau)) + E[Y^2]\sin(\omega t)\sin(\omega(t+\tau)) = C(t, t+\tau)\cos(-\omega\tau) = C(t, t+\tau)\cos(\omega\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ C(t, t+\tau) & = & C(t, t+\tau) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(t, t+\tau) & = & R(t, t+\tau) - \cancel{E[X]E[Y]}^0 \end{array}$$

↑
id. trigonométrica

$$\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$$

$$\begin{array}{l} A = \omega t \\ B = \omega(t+\tau) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A-B = \omega t - \omega t - \omega\tau = -\omega\tau \end{array} \right.$$

El proceso es WSS (media cte y R_Z y C_Z indep del tiempo)

8) Un proceso aleatorio está definido por $X(t) = X_0 + Vt$ donde X_0 y V son dos variables aleatorias. Sabemos que el valor esperado de X_0 es 2, el valor esperado de V es 3, la varianza de X_0 es 25 y la varianza de V es 16. También conocemos la correlación de las dos variables X_0 y V que vale 9. Determine:

- a) El valor esperado de $X(t)$.
- b) La autocorrelación de $X(t)$.
- c) La autocovarianza de $X(t)$.
- d) ¿Es $X(t)$ un proceso estacionario en sentido amplio?

Handwritten signature

Info que tengo

$X(t) = X_0 + Vt$, X_0 y V son dos v.a.

Valor esperado de $X_0 = 2 = E[X_0]$; $C_{X_0} = 25$

$V = 3 = E[V]$; $C_V = 16$

$\text{CORR}(X_0, V) = 9$

① No de.

A) Valor esperado de $X(t) = E[X(t)] = E[X_0 + V_0 t] = E[X_0] + E[V_0]t = 2 + 3t = m_X$

B) Autocorrelación de $X(t)$ $R_X(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E[(X_0 + V_0 t)(X_0 + V_0(t+\tau))] =$
 $= E[X_0^2 + X_0 V_0(t+\tau) + X_0 V_0 t + V_0^2(t+\tau)t] =$
 $= E[X_0^2] + E[X_0 V]t + E[X_0 V]\tau + E[X_0 V]t + E[V^2]t^2 + E[V^2]\tau t =$

* Necesito $E[X_0^2]$ y $E[V^2]$.

De $C_{X_0} = 25 = E[X_0^2] - (E[X_0])^2 \Rightarrow$ despejo $E[X_0^2] = 29$

De $C_V = 16 = E[V^2] - (E[V])^2 \Rightarrow$ despejo $E[V^2] = 25$

$= 29 + 9(2t+\tau) + 25t(t+\tau) = R_X(t, t+\tau)$ ② Depende del tiempo

C) Autocovarianza de X $C_X(t, t+\tau) = R_X(t, t+\tau) - m_X(t)m_X(t+\tau) =$

$= 29 + 9(2t+\tau) + 25t(t+\tau) - (2+3t)(2+3(t+\tau)) =$

$= 29 + 18t + 9\tau + 25t^2 + 25t\tau - (2+3t)(2+3t+3\tau) =$

$= 29 + 18t + 9\tau + 25t^2 + 25t\tau - (4 + 6t + 6\tau + 6t + 9t^2 + 9t\tau) =$

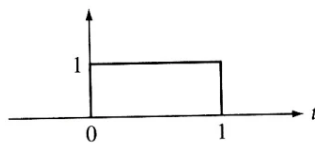
$= 29 + 18t + 9\tau + 25t^2 + 25t\tau - 4 - 12t - 6\tau - 9t^2 - 9t\tau =$

$= 25 + 6t + 3\tau + 16t^2 + 16t\tau =$

$= 25 + 3(2t+\tau) + 16t(t+\tau) = C_X(t, t+\tau)$ ③ Depende del tiempo

D) No es WSS (ver ①, ②, ③)

- 9) Sea $g(t)$ el pulso rectangular que se muestra en la figura. El proceso aleatorio $X(t)$ se define como $X(t) = Ag(t)$ donde A es una variable aleatoria discreta que toma valores $+1$ o -1 con la misma probabilidad.



Handwritten signature

Determine:

- a) La pmf conjunta (función masa de probabilidad conjunta) de $X(t)$ y $X(t+d)$.
- b) La función de autocovarianza $C_X(t, t+d)$, $d > 0$.

Info que tengo

$$X(t) = Ag(t)$$

$g(t)$ función pulso rectangular definido en intervalo $[0, 1]$ $g(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

A variable aleatoria con 2 posibles valores: $+1$ y -1 , misma probabilidad.

A) Pmf conjunta:

$$P_X(X(t), X(t+\tau)) = P[X(t), X(t+\tau)]$$

* Análisis de varios casos:

¿Qué pasa si $X(t)$ se encuentra fuera y $X(t+\tau)$ fuera de $[0, 1]$

$$X(t) = 0 \text{ y } X(t+\tau) = 0$$

$$* P[X(t)=0, X(t+\tau)=0] = 1$$

¿Y si $X(t)$ está fuera y $X(t+\tau)$ dentro?

$$X(t) = 0$$

$$* P[X(t)=0, X(t+\tau)=-1] = 0.5$$

$$* P[X(t)=0, X(t+\tau)=1] = 0.5$$

¿Y si es al revés?

$$X(t+\tau) = 0$$

$$* P[X(t)=1, X(t+\tau)=0] = 0.5$$

$$* P[X(t)=-1, X(t+\tau)=0] = 0.5$$

¿Y ambos dentro?

$$* P[X(t)=1, X(t+\tau)=1] = 0.5$$

$$* P[X(t)=-1, X(t+\tau)=-1] = 0.5$$

$$\tau = d$$

B) Función de autocovarianza

$$m_x(t) = E[X(t)] = E[Ag(t)] = E[A]g(t) = 0 \cdot g(t) = 0 //$$

$$E[A] = -1(0.5) + 1(0.5) = 0$$

$$E[A^2] = 1$$

$$\text{Ahora, sé que } R_x(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E[A^2g(t)g(t+\tau)] = E[A^2]g(t)g(t+\tau) =$$

$$R_x(t, t+\tau) = g(t)g(t+\tau)$$

y finalmente:

$$C_x(t, t+\tau) = R_x(t, t+\tau) - \cancel{m_x(t)m_x(t+\tau)} = g(t)g(t+\tau):$$

$$C_x(t, t+\tau) = \begin{cases} 1 & t, t+\tau \in [0, 1] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Alfonso

- 10) Sean $X(t)$ e $Y(t)$ dos procesos aleatorios, independientes y estacionarios en sentido amplio, con media cero y la misma covarianza $C_X(\tau) = 4 * e^{-|\tau|}$. Se define el proceso $Z(t)$ como $Z(t) = 3 * X(t) - 5 * Y(t)$. Determine:

Atun

- a) ☒ Determinar si $Z(t)$ es estacionario en sentido amplio.
- b) ☒ Determinar la pdf de $Z(t)$ si $X(t)$ e $Y(t)$ son conjuntamente gaussianos con media zero y covarianza $C_X(\tau) = 4 * e^{-|\tau|}$. Ayuda: la combinación lineal de transformaciones lineales de procesos conjuntamente gaussianos origina procesos gaussianos.
- c) ☒ Encontrar la pdf conjunta de $Z(t_1)$ y $Z(t_2)$ en el apartado b).
- d) Encontrar la covarianza cruzada entre $Z(t)$ y $X(t)$.

Info que tengo

X e Y p.a. indep y WSS

$$m_X = m_Y = 0$$

$$C_X(\tau) = C_Y(\tau) = 4e^{-|\tau|}$$

$$Z(t) = 3X(t) - 5Y(t)$$

A) ¿Es $Z(t)$ WSS?

$$* E[Z(t)] = E[3X(t) - 5Y(t)] = 3E[X(t)] - 5E[Y(t)] = 0$$

la media es cte

$$* R_Z(t, t+\tau) = E[Z(t)Z(t+\tau)] =$$

$$= E[(3X(t) - 5Y(t))(3X(t+\tau) - 5Y(t+\tau))] =$$

$$= E[9X(t)X(t+\tau) - 15(X(t)Y(t+\tau) - Y(t)X(t+\tau)) + 25Y(t)Y(t+\tau)] =$$

$$X \text{ e } Y \text{ indep} \rightarrow = 9E[X(t)X(t+\tau)] + 25E[Y(t)Y(t+\tau)] = 9R_X(\tau) + 25R_Y(\tau)$$

$$E[XY] = E[X]E[Y] = 0$$

Conclusión $Z(t)$ es WSS

↑
como X e Y
son WSS

$$R_X(t, t+\tau) = R_X(\tau)$$

$$R_Y(t, t+\tau) = R_Y(\tau)$$

B) PDF asumiendo que X e Y son Gaussianos, Z lo es también:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Sabemos que $\mu = m_Z = 0$; $\sigma^2 = \text{VAR}(Z) = C_Z(\tau)$;

Sé que $C_X(\tau) = R_X(\tau) - m_X^2$ y como $m_X = 0$, tengo que $C_X(\tau) = R_X(\tau)$
(y como $C_Y(\tau) = C_X(\tau)$, consec. tengo que $R_X(\tau) = R_Y(\tau)$)

Entonces tengo que:

$$C_Z(\tau) = R_Z(\tau) - m_Z^2 = R_Z(\tau) = 9R_X(\tau) + 25R_Y(\tau) = 34R_X(\tau) = 136e^{-|\tau|}$$

La varianza es $C_z(\tau=0)$, entonces: $\text{VAR}[z] = C_z(0) = \underline{\sigma^2 = 136}$

la pdf de z será: $f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, con $\mu=0$ y $\sigma^2=136$

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}136} e^{-\frac{z^2}{272}}$$

c) pdf conjunta de $z(t_1)$ y $z(t_2)$:

$$f_{z(t_1)z(t_2)}(z_1, z_2) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(z-m)^T K^{-1}(z-m)\right\}}{(2\pi)^{n/2} |K|^{1/2}}$$

donde $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ y $m = \begin{bmatrix} E[z(t_1)] \\ E[z(t_2)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

y K la matriz de covarianzas $K = \begin{bmatrix} \text{VAR}[z(t_1)] & \text{COV}[z(t_1)z(t_2)] \\ \text{COV}[z(t_1)z(t_2)] & \text{VAR}[z(t_2)] \end{bmatrix} =$
$$= \begin{bmatrix} 136 & 136 e^{-|t_2-t_1|} \\ 136 e^{-|t_2-t_1|} & 136 \end{bmatrix}$$

d) Covarianza cruzada entre $z(t)$ y $x(t)$:

$$C_{z,x}(t, t+\tau) = R_{z,x}(t, t+\tau) - m_z(t) m_x(t+\tau) = E[z(t)x(t+\tau)] =$$

$$= E[(3x(t) - 5y(t))x(t+\tau)] = E[3x(t)x(t+\tau) - 5y(t)x(t+\tau)] =$$

$$= 3C_x(\tau) - 5E[\cancel{x(t)x(t+\tau)}] = 12e^{-|\tau|}$$

Atina

- 11) Sean $Z_1, Z_2, \dots$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $P[Z_n = 1] = p$ y $P[Z_n = -1] = q = 1 - p$. Sea $X_n = \sum_{i=1}^n Z_i$, $n = 1, 2, \dots$ donde $X_0 = 0$. El conjunto de variables aleatorias $\{X_n, n \geq 0\}$ es un proceso aleatorio denominado *simple random walk* $X(n)$ en una dimensión.

- a) ¿Qué tipo de proceso aleatorio es?
- b) Genere una realización del proceso aleatorio
- c) Determine la función masa de probabilidad (pmf) de primer orden ($p_n(k) = P[X_n = k]$) de este proceso aleatorio.

Info que tengo

$Z_1, \dots, Z_n$ son v.a. iid.

$$P[Z_n = 1] = p; P[Z_n = -1] = 1 - p$$

$X_n = \sum_{i=1}^n Z_i$, $n = 1, 2, \dots$, $X_0 = 0$. $\rightarrow \{X_n, n \geq 0\}$ proceso aleatorio "simple random walk".

$X(n)$ mono dimensional.

A) ¿Tipo de proceso aleatorio?

Discreto en el tiempo ($n = 1, 2, \dots$) y de variables discretas ($Z_n = \pm 1$).

B) Generar una realización del proceso aleatorio

Elijo un n aleatorio, $n=4$ por ejemplo.

Defino los valores de Z_1, Z_2, Z_3 y Z_4 (pueden ser $+1$ o -1):

$$Z_1 = -1$$

$$X_1 = Z_1 = -1$$

$$X_0 = 0$$

$$Z_2 = -1$$

$$X_2 = Z_1 + Z_2 = -2$$

$$Z_3 = 1$$

$$X_3 = Z_1 + Z_2 + Z_3 = -1$$

$$Z_4 = -1$$

$$X_4 = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = -2$$

* este apartado tiene infinitas soluciones.

c) pmf de primer orden

NO sé...

- 12) En un sistema de comunicaciones se utiliza la siguiente señal aleatoria $Y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$, donde A es una variable aleatoria que sigue un modelo de Bernoulli con parámetro p , ϕ es otra variable aleatoria independiente de A y uniforme en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y ω es una constante conocida.

- a) Determine la media del proceso aleatorio $Y(t)$.
- b) Obtenga la función de autocorrelación del proceso $Y(t)$.
- c) ¿Es $Y(t)$ un proceso estacionario en sentido amplio?
- d) Averigüe si el proceso $Y(t)$ es ergódico en la media o ergódico en la autocorrelación.

$$A) E[Y(t)] = E[A \sin(\omega t + \phi)] = E[A] E[\sin(\omega t + \phi)] = E[A] \cdot 0 = 0 = m_Y$$

A y ϕ v.a. independientes:

ϕ uniforme en $[-\pi, \pi]$, entonces: $f_\phi = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

$$\textcircled{1} E[\sin(\omega t + \phi)] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega t + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega t + \theta) \cdot d\theta = -\frac{1}{2\pi} \cos(\omega t + \theta) \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$= 0$

$$B) R_Y(t, t+\tau) = E[Y(t) Y(t+\tau)] = E[A^2 \sin(\omega t + \phi) \sin(\omega(t+\tau) + \phi)] = E[A^2] \cdot E[\sin(\dots) \sin(\dots)] = \\ = \frac{1}{2} E[A^2] E[\cos(-\omega\tau) - \cos(2\omega t + \omega\tau + 2\phi)] = \frac{1}{2} \cos(\omega\tau) E[A^2]$$

c) Sí es WSS, media de y y R_x no dependiente del tiempo

d) Verificamos que $m_Y = 0 = A[Y(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Y(t) dt$:

$$A[Y(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \underbrace{a \sin(\omega t + \phi)}_{\text{realización concreta de que hacemos la media temporal.}} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a}{2T} \int_{-T}^T \sin(\omega t + \phi) dt = 0$$

realización concreta de que hacemos la media temporal.

seno oscila simétricamente respecto a cero.

$m_Y = A[Y(t)] \rightarrow$ proceso ergódico en la media.

y para la autocorrelación tengo que: $R_Y(\tau) = R_{YY}(\tau) \rightarrow$ No es ergódico en R_x .

$$R_{YY}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Y(t) Y(t+\tau) dt = \frac{a^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T E[\sin(\omega t + \phi) \sin(\omega(t+\tau) + \phi)] dt = \\ = \frac{a^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega\tau) dt = \frac{a^2}{2} \cos(\omega\tau) \neq \frac{E[A^2]}{2} \cos(\omega\tau)$$

13) El proceso aleatorio $Z(t)$ tiene la siguiente descripción analítica

$$Z(t) = X \cos(2\pi f_0 t) + Y \sin(2\pi f_0 t) \quad (5)$$

donde X es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(-1,1)$, e Y es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0,1)$. Además, X e Y son independientes. Calcule:

Atina

- La media $m_Z(t)$
- La función de autocorrelación $R_Z(t, t+\tau)$. ¿Es un proceso estacionario en sentido amplio?
- La potencia media del proceso P_Z .

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad X \text{ e } Y \text{ independientes}$$

$$E[Y] = 1/2$$

$$A) E[Z(t)] = E[X] \cos(2\pi f_0 t) + E[Y] \sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi f_0 t)$$

$$E[X] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0$$

B) No es WSS (media no de).

$$\begin{aligned} R_Z &= E[Z(t)Z(t+\tau)] = E[(X \cos(2\pi f_0 t) + Y \sin(2\pi f_0 t))(X \cos(2\pi f_0(t+\tau)) + Y \sin(2\pi f_0(t+\tau)))] \\ &= E[X^2 \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0(t+\tau)) + XY \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0(t+\tau)) + XY \cos(2\pi f_0(t+\tau)) \sin(2\pi f_0 t) + \\ &\quad Y^2 \sin(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0(t+\tau))] = \frac{1}{3} ((\cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0(t+\tau)) + \sin(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0(t+\tau))) = \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A = 2\pi f_0 t \\ B = 2\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau \end{cases}$$

id. trigonométrica

$$\downarrow \cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$$

$$= \frac{1}{3} \cos(-2\pi f_0 \tau) = \frac{1}{3} \cos(2\pi f_0 \tau) = R_Z(\tau)$$

$$E[X^2] = \int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{3}$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2 \cdot 1 dy = \frac{1}{3}$$

$$E[XY] = E[X]E[Y] = 0$$

son indep

C) Potencia media P_Z

$$\text{Como } R_Z \text{ no depende de } t, P_Z = R_Z(0) = \frac{1}{3}$$

- 14) Sea el proceso aleatorio $X(t)$ de media cero y cuya función de autocorrelación viene dada por $R_X(t, t + \tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$ con $\lambda > 0$. Determine la densidad de potencia espectral del proceso aleatorio $X(t)$.

Datos que tengo

$$m_X = 0$$

$$R_X(t, t + \tau) = e^{-2\lambda|\tau|}, \lambda > 0 \quad \left. \vphantom{R_X(t, t + \tau) = e^{-2\lambda|\tau|}, \lambda > 0} \right\} \begin{array}{l} X(t) \text{ es WSS!} \end{array}$$

A) Determinar potencia espectral de $X(t)$:

Para ello, tenemos que obtener $S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A [R_X(t, t + \tau)] e^{-j\omega\tau} d\tau$;

$$\text{como } X(t) \text{ es WSS, } S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\lambda|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau =$$

$$= S_X(\tau) = \frac{2(2\lambda)}{(2\lambda)^2 + \omega^2} = \frac{4\lambda}{2\lambda + \omega^2}$$

↑
TABLA TRANSFORMADAS
DE FOURIER

15) Determine la densidad de potencia espectral $S_X(\omega)$ del proceso aleatorio $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$, donde A y ω_0 son constantes y ϕ es una variable aleatoria uniforme sobre $(-\pi, \pi)$.

Alum

$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ y ϕ v.a. uniforme, es decir que:

$$f_\phi(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -\pi < \phi < \pi \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Voy a ver si es WSS, así que:

$$\rightarrow m_X = E[X(t)] = E[A \cos(\omega_0 t + \phi)] = A \cdot E[\cos(\omega_0 t + \phi)] = A \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \phi) \frac{1}{2\pi} d\phi = 0.$$

cos integrado en $(-\pi, \pi) = 0$.

$$\rightarrow R_X = E[X(t)X(t+\tau)] = E[A^2 \underbrace{\cos(\omega_0 t + \phi)}_a \underbrace{\cos(\omega_0(t+\tau) + \phi)}_b] = A^2 E\left\{ \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \right\} =$$

$a+b = \omega_0 t + \phi + \omega_0 t + \omega_0 \tau + \phi = 2\phi + 2\omega_0 t + \omega_0 \tau$
 $a-b = \omega_0 t + \phi - \omega_0 t - \omega_0 \tau - \phi = -\omega_0 \tau$

$$R_X = \frac{A^2}{2} E[\cos(2\phi + 2\omega_0 t + \omega_0 \tau) + \cos(-\omega_0 \tau)] = \frac{A^2}{2} (E[\cos(2\phi + 2\omega_0 t + \omega_0 \tau)] + \cos(\omega_0 \tau)) =$$

$$R_X = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$

m_X es cte y R_X no dep de t , es WSS, entonces:

$$S_X(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} R_X(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = \frac{A^2 \pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

16) Sea $X(t)$ un proceso aleatorio de media constante y función de autocorrelación $R_X(\tau) = Be^{-\tau^2/2a^2}$ donde $B > 0$ y $a > 0$ son constantes. Determine:

- a) La densidad de potencia espectral S_X .
- b) La potencia promedio P_X .

$X(t)$ con $m_X = \text{cte}$ y $R_X(\tau) = Be^{-\tau^2/2a^2}$, $B > 0$, $a > 0$.

Como $m_X = \text{cte}$ y R_X solo dep. de τ , es WSS.

A) $S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B e^{-\tau^2/2a^2} e^{-j\omega\tau} d\tau = Ba\sqrt{2\pi} e^{-a^2\omega^2/2}$

B) Para $P_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega \Rightarrow$ como el proceso es WSS: $P_X = R_X(0) = B$ vatios

17) Sea $D_n = X_n - X_{n-d}$, donde d es una constante y X_n es un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio y de media cero.

- a) Determine $R_D(k)$ y $S_D(f)$ en función de $R_X(k)$ y $S_X(f)$.
- b) Determine $E[D_n^2]$.

Alfaro

Datos que tengo

$D_n = X_n - X_{n-d}$ d es cte y X_n WSS.

A) $R_D(k) = R_D[D_n \cdot D_{n+k}] = E[(X_n - X_{n-d})(X_{n+k} - X_{n+k-d})] =$
 $= E[X_n \cdot X_{n+k} - X_n X_{n+k-d} - X_{n-d} X_{n+k} + X_{n-d} X_{n+k-d}] =$
 $= R_X(k) - R_X(k-d) - R_X(k-d) + R_X(k) =$

$R_D(k) = 2R_X(k) - R_X(k-d) - R_X(k+d) \rightarrow \textcircled{i} D_n \text{ es WSS}$

$S_D(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_D(k) e^{-j2\pi f k} = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X(k) e^{-j2\pi f k} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X(k-d) e^{-j2\pi f k} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X(k+d) e^{-j2\pi f k} =$

↑
me piden con f , no con ω y $\omega = 2\pi f$.

$m = k-d \Leftrightarrow k = m+d$
 $e^{-j2\pi f d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X(m) e^{-j2\pi f m} = S_X(f)$

$= 2S_X(f) - S_X(f) e^{-j2\pi f d} - S_X(f) e^{+j2\pi f d} =$

$= S_X(f) (2 - e^{-j2\pi f d} - e^{+j2\pi f d}) =$

$= S_X(f) (2 - (e^{-j2\pi f d} + e^{j2\pi f d})) = 2S_X(f) (1 - \cos(2\pi f d))$

fórmula de Euler

$e^{-j2\pi f d} = \cos(2\pi f d) - j \sin(2\pi f d)$
 $e^{+j2\pi f d} = \cos(2\pi f d) + j \sin(2\pi f d)$
 $\left\{ \begin{array}{l} \cos(2\pi f d) - j \sin(2\pi f d) + \\ \cos(2\pi f d) + j \sin(2\pi f d) = \end{array} \right.$

B) Determinar $E[D_n^2] = R_D(0) = 2R_X(0) - R_X(d) - R_X(-d) \stackrel{2\cos(2\pi f d)}{=} 2(R_X(0) - R_X(d))$
 ↑
 como es WSS
 R_X es función par

18) Sea $X(t)$ un proceso aleatorio Gaussiano estacionario en sentido amplio con una media $E[X(t)] = 4$ y con una función de autocorrelación $R_X(\tau) = 25e^{-3|\tau|} + 16$. Determine:

- a) La función densidad de probabilidad conjunta de las tres variables aleatorias resultantes del muestreo del proceso aleatorio en los instantes de tiempo t_i ($X(t_i), i = 1, 2, 3$) con $t_i = t_0 + [(i-1)/2]$, donde t_0 es una constante.
- b) La densidad de potencia espectral S_X .
- c) La potencia promedio P_X .

Atu

$X(t)$ WSS con $m_X = 4$ y $R_X(\tau) = 25e^{-3|\tau|} + 16$.

A) pdf conjunta de 3 v.a. resultantes de muestrear en

$X(t_0), X(t_0 + 1/2), X(t_0 + 1)$ con t_0 cte:

Como el proceso es Gaussiano, pdf conjunta será:

$$f_{X(t_0), X(t_0 + 1/2), X(t_0 + 1)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-m)^T K^{-1}(x-m)\right\}}{(2\pi)^{n/2} |K|^{1/2}}$$

$$\text{donde } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ y } m = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

como es WSS

$$\text{y } K = \begin{bmatrix} C_X(t_1, t_1) & C_X(t_1, t_2) & C_X(t_1, t_3) \\ C_X(t_1, t_2) & C_X(t_2, t_2) & C_X(t_2, t_3) \\ C_X(t_1, t_3) & C_X(t_2, t_3) & C_X(t_3, t_3) \end{bmatrix}$$

$$t_2 - t_1 = -1/2$$

$$t_3 - t_1 = -1$$

$$t_3 - t_2 = -1/2$$

$$\begin{bmatrix} 41 & 25e^{-3/2} + 16 & 25e^{-3} + 16 \\ 25e^{-3/2} + 16 & 41 & 25e^{-3/2} + 16 \\ 25e^{-3} + 16 & 25e^{-3/2} + 16 & 41 \end{bmatrix}$$

B) Como en WSS, $S_x = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{150}{a + \omega^2} + 32\pi\delta(\omega)$

C) $P_x = R_x(0) = 41$

↑
tabla tr.
Fourier



- 19) Sea un proceso aleatorio $Y(t) = AX(t)$ donde $X(t)$ es un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio y A es una variable aleatoria independiente de $X(t)$ que toma valores 1 y -1 con la misma probabilidad. Obtenga la densidad de potencia espectral del proceso $Y(t)$, $S_Y(w)$, en función de la densidad de potencia espectral del proceso $X(t)$, $S_X(w)$.

Handwritten signature

$Y(t) = AX(t)$ con $X(t)$ WSS y A v.a. indep con $P(A=1) = P(A=-1) = 0.5$

A) $S_Y(w)$ en función de $S_X(t)$.

Quiero ver si Y es WSS:

$$m_Y = E[Y(t)] = 0.5 X(t) - 0.5 X(t) = 0$$

$$0.5 \cdot 1^2 + 0.5 \cdot (-1)^2 = 1$$

$$R_Y = E[Y(t)Y(t+\tau)] = E[A^2 X(t)X(t+\tau)] = E[A^2] E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(t, t+\tau) = R_X(\tau)$$

Y es WSS, entonces:

$$S_Y(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_Y(\tau) e^{-jw\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-jw\tau} d\tau = S_X(w)$$

20) Sea un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta impulso viene dada por $h(t) = 4e^{-2t}u(t)$, donde $u(t)$ es la función escalón, y supongamos que tiene como entrada un proceso $X(t)$ estacionario en sentido amplio con media $m_X = 2$. Determine la media del proceso aleatorio de salida.

Atina

SL invariante dado por $4e^{-2t}u(t)$ siendo $u(t)$ la función escalón
 $X(t)$ WSS como proceso de entrada $m_X = 2$.

Media del proceso aleatorio de salida:

Como $X(t)$ es WSS, se cumple que $Y(t)$ salida también lo es.

$$E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)X(t-s)ds\right] =$$

$$E[Y(t)] = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)ds = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi f} dt =$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$E[Y(t)] = 2 \cdot 2 = 4 = m_Y$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} 4e^{-2t} u(t) dt = 4 \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \\ 4 \left[\frac{e^{-2t}}{-2} \right]_0^{+\infty} &= 4 \left(\frac{e^{-\infty}}{-2} - \frac{e^0}{-2} \right) = 4 \cdot 0.5 = 2 \end{aligned}$$

21) La entrada de un filtro es un ruido blanco de media cero y densidad de potencia espectral $N_0/2$. El filtro tiene una función de transferencia dada por

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f}$$

Determine:

- a) $S_{Y,X}(f)$ y $R_{Y,X}(\tau)$.
- b) $S_Y(f)$ y $R_Y(\tau)$.
- c) ¿Cuanto vale la potencia promedio del proceso de salida?

Datos

$$S_X(f) = \frac{N_0}{2} \text{ (cte.)} \rightarrow R_X(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f}$$

$$A) \text{ Piden: } S_{Y,X}(f) = H^*(f) S_X(f) = \frac{1}{1 - j2\pi f} \cdot \frac{N_0}{2}$$

$$R_{Y,X}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{Y,X}(f) e^{j2\pi f\tau} df = \frac{N_0}{2} e^{\tau} u(-\tau) \quad \tau > 0$$

↑
TABLA
TRANSFORMADAS

$$B) \text{ Piden: } S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = \frac{1}{1^2 + (2\pi f)^2} \frac{N_0}{2}$$

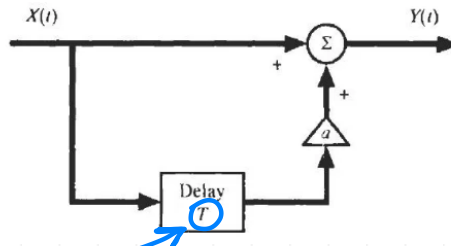
$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f) e^{j2\pi f\tau} df = \frac{N_0}{4} \cdot e^{-|\tau|}$$

$$\frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{1^2 + (2\pi f)^2} = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1^2 + (2\pi f)^2} = \frac{N_0}{4} \cdot \frac{2}{1^2 + (2\pi f)^2}$$

C) Como el ruido blanco es WSS, al pasar un sistema LTI, la salida será también WSS, entonces:

$$P_Y = R_Y(0) = \frac{N_0}{4} W$$

22) Sea la entrada al siguiente filtro un ruido blanco con densidad de potencia espectral σ^2 . Determine la densidad de potencia espectral de $Y(t)$.



Atun

$$Y(t) = X(t) - aX(t - T) ; X(t) \text{ con } S_X(f) = \sigma^2$$

Nos piden $S_Y(f)$:

* Necesito la función de transferencia $H(f)$:

$$* \text{ Con } S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$

$$H(f) \text{ lo obtengo de } H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} :$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t) e^{-j2\pi f t} dt \Rightarrow Y(f) = X(f) + aX(f) e^{-j2\pi f T} =$$

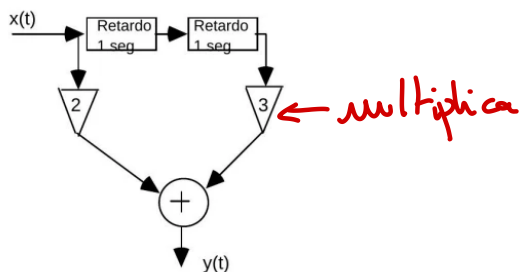
TRANSFORMADA
FOURIER

$$Y(f) = X(f) (1 + a e^{-j2\pi f T}) \Rightarrow H(f) = 1 + a e^{-j2\pi f T}$$

$$\text{Entonces } S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = \sigma^2 (1 + 2a \cos(2\pi f T) + a^2)$$

$$\begin{aligned} H(f) H^*(f) &= (1 + a e^{-j2\pi f T}) (1 + a e^{j2\pi f T}) = \\ &= 1^2 + a e^{j2\pi f T} + a e^{-j2\pi f T} + a^2 = \text{fórmula Euler} \\ &= 1 + a(e^{j2\pi f T} + e^{-j2\pi f T}) + a^2 = \\ &= \underline{1 + 2a \cos(2\pi f T) + a^2} \end{aligned}$$

23) Sea el siguiente sistema, donde la entrada $x(t)$ es un proceso aleatorio estacionario



- a) Determine la función de autocorrelación del proceso de salida $y(t)$ en función de la autocorrelación del proceso de entrada $x(t)$.
- b) Determine la densidad de potencia espectral de la salida si la autocorrelación del proceso de entrada viene dada por $R_X(\tau) = \frac{4e^{-|\tau|}}{3}$.
- c) El sistema propuesto se puede considerar un filtro lineal invariante con el tiempo. Obtenga el módulo de la respuesta en frecuencia del sistema a partir de la densidad de potencia espectral de la salida y de la entrada del sistema.
- d) Sea la autocorrelación del proceso de entrada $x(t)$ la indicada en el apartado b). Al realizar un muestreo de orden uno del proceso aleatorio $x(t)$ obtenemos una variable aleatoria continua uniforme en el intervalo $[-a, a]$. Determine el valor de a .

$x(t)$ es WSS.

A) Obtener $y(t)$: $y(t) = 2x(t) + 3x(t-2)$

Y ahora tengo que:

$$\begin{aligned}
 R_Y(t, t+\tau) &= E[y(t)y(t+\tau)] = E[(2x(t) + 3x(t-2))(2x(t+\tau) + 3x(t+\tau-2))] = \\
 &= E[4x(t)x(t+\tau) + 6x(t)x(t+\tau-2) + 6x(t-2)x(t+\tau) + 9x(t-2)x(t+\tau-2)] = \\
 &= 4R_X(\tau) + 6R_X(\tau-2) + 6R_X(\tau+2) + 9R_X(\tau) = \\
 &= 13R_X(\tau) + 6R_X(\tau-2) + 6R_X(\tau+2) = R_Y(\tau)
 \end{aligned}$$

B) Con $R_X(\tau) = \frac{4}{3}e^{-|\tau|}$, $S_Y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_X(f)$.

$$\hookrightarrow S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{4}{3} \frac{2}{1+4(2\pi f)^2}$$

$$\hookrightarrow Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = 2X(f) + 3X(f)e^{-j2\pi 2f} = 2X(f) + 3X(f)e^{-j4\pi f}$$

$$\text{Ahora, } H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = 2 + 3e^{-j4\pi f}$$

Calculo $m_y = H(0)m_x = 5 \cdot m_x \rightarrow \text{cte.}$ y R_y vimos que solo depende de τ . $y(t)$ WSS:

$$\begin{aligned}
 \text{Entonces, } S_Y(f) &= F[R_Y(\tau)] = F[13R_X(\tau) + 6R_X(\tau-2) + 6R_X(\tau+2)] = \\
 &= 13S_X(f) + 6S_X(f)e^{-j4\pi f} + 6S_X(f)e^{j4\pi f}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= S_X(f) \underbrace{(13 + 6e^{-j4\pi f} + 6e^{j4\pi f})}_{\text{Euler}} = \\
 &= S_X(f) (13 + 6(2\cos(4\pi f))) = \\
 &= S_X(f) (13 + 12\cos(4\pi f))
 \end{aligned}$$

$$y \text{ } S_X(f) = F[R_X(\omega)] = \frac{4}{3} \frac{2}{1^2 + (2\pi f)^2}$$

$$\text{Entonces } S_Y(f) = \frac{8}{1^2 + (2\pi f)^2} \left\{ \frac{13}{3} + 4\cos(4\pi f) \right\}$$

c) El módulo de la respuesta es:

$$|H(f)| = \sqrt{13 + 12\cos(4\pi f)}$$

D) Como estamos trabajando con procesos WSS:

Puedo calcular que $P_X = R_X(0) = \frac{4}{3}$ y se cumple que:

$R_X(0) = E(x(t)^2)$, y con

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & -a < x < a \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\text{saco que } E[x(t)^2] = \int_{-a}^a x^2 \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a x^2 dx = \frac{1}{2a} \left(\frac{x^3}{3} \right)_{-a}^a =$$

$$\frac{1}{2a} \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} \right) = \frac{2a^3}{6a} = \frac{1}{3} a^2.$$

Entonces el final es trivial: $\frac{4}{3} = \frac{1}{3} a^2 \Leftrightarrow a^2 = 4$; $a = 2$

Alonso

24) Sea $X(t)$ un proceso Gaussiano estacionario en sentido amplio de media cero con función de autocorrelación dada por $R_X(\tau) = 8\text{sinc}(4\tau)$ que es la entrada a un filtro lineal (todo filtro lineal es una transformación lineal) caracterizado por

$$|H(f)| = \begin{cases} 2 & |f| \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(6) 

- a) Determine la función de autocorrelación del proceso de salida $Y(t)$.
- b) Determine la probabilidad $P(Y(2) < 1)$.

$X(t)$ Gaussiano WSS $m_X = 0$ $R_X(\tau) = 8\text{sinc}(4\tau)$

$$|H(f)| = \begin{cases} 2 & |f| \leq 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$A) S_X(f) = F[R_X(\tau)] = 8 \cdot \frac{1}{4} \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right) = 2 \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right)$$

$$\text{y con } S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = 8 \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right) \text{ si } |f| \leq 2$$

y ahora, para R_Y tengo que sé que $\frac{1}{|a|} \text{rect}\left(\frac{f}{a}\right)$, y $\frac{x}{a} = 8, \boxed{x=32}$

$$R_Y(\tau) = F[S_Y(f)] = \text{sinc}(4\tau) = 32\text{sinc}(4\tau)$$

B) Determinar probabilidad $P(Y(2) < 1)$

$$* m_Y = m_X = 0$$

$$* \text{VAR}[Y] = C_Y(\tau) = R_Y(\tau) - m_Y^2 = 32\text{sinc}(0) = 32$$

La pdf de Y es:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 32}} e^{-\frac{y^2}{64}}$$

en textos de ingeniería

Entonces:

$$P(Z < \frac{1}{\sqrt{32}}) = 1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{32}}\right)$$

$$P(Y(2) < 1) = P\left(Z < \frac{1 - m_Y}{\sigma_Y}\right) = P\left(Z < \frac{1}{\sqrt{32}}\right) = 1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{32}}\right)$$