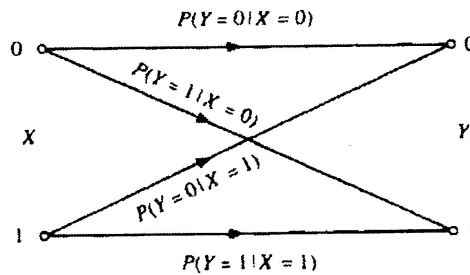


Relación de Problemas. Tema 2
Relación 1: Variable multidimensional

- 1) Sea el canal de comunicación binario que se muestra en la figura. Sea (X, Y) una variable aleatoria de dimensión dos, donde X es la entrada al canal e Y es la salida del canal. Sea $P[X = 0] = 0'5$, $P[Y = 1|X = 0] = 0'1$ y $P[Y = 0|X = 1] = 0'2$.



-
- a) Determine la pmf conjunta de (X, Y) .
 - b) Determine las pmfs marginales de X e Y .
 - c) ¿Son X e Y independientes?

2) La pmf conjunta de una variable aleatoria de dimensión dos (X, Y) viene dada por

$$p_{XY}(x_i, y_j) = \begin{cases} k(2x_i + y_j) & x_i = 1, 2; y_j = 1, 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1)$$

donde k es una constante.

- a) Determine el valor de k .
- b) Determine las pmfs marginales de X e Y .
- c) ¿Son X e Y independientes?

3) La pdf conjunta de una variable aleatoria de dimensión dos (X, Y) viene dada por

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} kxy & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2)$$

donde k es una constante.

- a) Determine el valor de k .
- b) Determine las pdfs marginales de X e Y .
- c) ¿Son X e Y independientes?

4) Sea la variable aleatoria de dimensión dos (X, Y) del problema 2.

- a) Determine las pmfs condicionales $p_{Y|X}(y_j|x_i)$ y $p_{X|Y}(x_i|y_j)$.
- b) Determine $P[Y = 2|X = 2]$ y $P[X = 2|Y = 2]$.

5) La pdf conjunta de una variable aleatoria de dimensión dos (X, Y) es

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y}e^{-x/y}e^{-y} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3)$$

Determine $P[X > 1|Y = y]$.

6) Sea una variable aleatoria de dimensión dos (X, Y) con una pmf conjunta

$$p_{XY}(x_i, y_j) = \begin{cases} 1/3 & (0, 1), (1, 0), (2, 1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4)$$

- a) ¿Son X e Y independientes?
- b) ¿Están X e Y correladas?

7) Tenemos dos variable aleatorias X e Y de las que conocemos $E[X] = 0$, $E[Y] = -1$, $E[X^2] = 2$, $E[Y^2] = 4$ y la correlación de X e Y que vale -2 . Se definen dos nuevas variable aleatorias W y U de forma tal que $W = 2X + Y$ y $U = -X - 3Y$. Determine:

- a) Las varianzas de las variables W y U .
- b) La correlación de las variables W y U .

- c) La covarianza de las variables W y U .
- 8) Sea (X, Y) la variable aleatoria de dimensión dos del problema 1.
- a) Determine la media y la varianza de X .
 - b) Determine la media y la varianza de Y .
 - c) Determine la covarianza de X e Y .
 - d) Determine el coeficiente de correlación de X e Y .
- 9) Sea la variable aleatoria de dimensión dos (X, Y) del problema 2. Determine la media condicional y la varianza condicional de Y dado que $x_i = 2$.
- 10) Sea (X, Y, Z) una variable aleatoria de dimensión tres con pdf conjunta

$$f_{XYZ}(x, y, z) = \begin{cases} ke^{-(ax+by+cz)} & x > 0, y > 0, z > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5)$$

donde a, b, c y k son constantes.

- a) Determine el valor de k .
 - b) Determine la pdf conjunta marginal de X e Y .
 - c) Determine la pdf marginal de X .
 - d) ¿Son X, Y , y Z independientes?.
- 11) Sea X una variable aleatoria uniforme sobre el intervalo $[0, 1]$ e $Y = e^X$. Determine $E[Y]$.
- 12) La pdf conjunta de una variable aleatoria de dimensión dos (X, Y) es

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k & 0 < y \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6)$$

donde k es una constante.

- a) Determine el valor de k .
- b) Determine las medias condicionales $E[Y|x]$ y $E[X|y]$.
- c) Determine las varianzas condicionales $VAR[Y|x]$ y $VAR[X|y]$.

Tema 1: Problemas variable aleatoria

EJERCICIO 1

DATOS

$$P[X=0] = 0.5$$

$$P[X=1] = 1 - P[X=0] = 0.5$$

$$P[Y=1|X=0] = 0.4$$

$$P[Y=0|X=0] = 1 - P[Y=1|X=0] = 0.6$$

$$P[Y=0|X=1] = 0.2$$

$$P[Y=1|X=1] = 1 - P[Y=0|X=1] = 0.8$$

APARTADO A - Obtener la pmf (función masa de probabilidad)

$$pmf(x, y) \Rightarrow F(x, y) = \sum_i \sum_j P[X=x_i, Y=y_j]$$

$$\bullet P[X=0, Y=0] = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3$$

$$\bullet P[X=0, Y=1] = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$$

$$\bullet P[X=1, Y=0] = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1$$

$$\bullet P[X=1, Y=1] = 0.5 \cdot 0.8 = 0.4$$

APARTADO B - marginales de X e Y

$$pmf(x) = \sum_i P[X=x_i] \quad \left\{ \begin{array}{l} P[X=0] = 0.5 \\ P[X=1] = 0.5 \end{array} \right.$$

$$pmf(y) = \sum_i P[Y=y_i] \quad \left\{ \begin{array}{l} P[Y=0] = 0.55 \\ P[Y=1] = 0.45 \end{array} \right.$$

APARTADO C - ¿Son X e Y independientes?

Para ver la independencia, se tiene que cumplir que $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$, en decir, $P[X=x, Y=y] = P[X=x] \cdot P[Y=y]$.

¿Se cumple independencia? $P[X=0, Y=0] = 0.3 \neq 0.5 \cdot 0.55 = P[X=0] \cdot P[Y=0]$, luego X e Y no son independientes.

EJERCICIO 2

$$p_{xy}(x_i, y_j) = \begin{cases} K(2x_i + y_j) & x_i = 1, 2; y_j = 1, 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad K \text{ es constante.}$$

APARTADO A - Valor de K

$$1 = P[X=1, Y=1] + P[X=1, Y=2] + P[X=2, Y=1] + P[X=2, Y=2] \Leftrightarrow$$

$$1 = 3K + 4K + 5K + 6K \Leftrightarrow 1 = 18K \Leftrightarrow K = 1/18$$

APARTADO C - Independencia X e Y

$$P[X=1, Y=1] = 3/18 \neq \frac{3}{18} \cdot \frac{8}{18} = P[X=1] \cdot P[Y=1] \rightarrow X \text{ e } Y \text{ son dependientes}$$

APARTADO B - pmfs marginales de X e Y.

$$pmf \text{ de } X = \begin{cases} P[X=1] = 7/18 \\ P[X=2] = 11/18 \end{cases}$$

$$pmf \text{ de } Y = \begin{cases} P[Y=1] = 8/18 \\ P[Y=2] = 10/18 \end{cases}$$

EJERCICIO 3

$$f_{xy}(x, y) = \begin{cases} Kxy & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \Leftrightarrow f_{xy}(x, y) = \begin{cases} Kxy & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

APARTADO A - Valor de K

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Kxy \, dx \, dy = 1 \Leftrightarrow K \int_0^1 \int_0^y xy \, dx \, dy = 1 \Leftrightarrow \frac{K}{2} \int_0^1 [x^2]_0^y y \, dy = 1 \Leftrightarrow \frac{K}{2} \int_0^1 y^3 \, dy = 1 \Leftrightarrow \frac{K}{8} = 1 \Leftrightarrow K = 8$$

APARTADO B - pdfs marginales X e Y

$$\text{Tan fácil como: } f_X(x) = \int_0^1 Kxy \, dy = 8x \int_0^1 y \, dy = 8x \cdot \frac{1}{2} = 4x = f_X(x)$$

$$f_Y(y) = \int_0^y Kxy \, dx = 8y \cdot \frac{y^2}{2} = 4y^3 = f_Y(y)$$

APARTADO C - X e Y independientes

$$8xy \neq 4x \cdot 4y^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{xy}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \end{array} \right.$$

EJERCICIO 4

$$p_{xy}(x_i, y_j) = \begin{cases} K(2x_i + y_j) & x_i = 1, 2; y_j = 1, 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad K = \frac{1}{18}$$

APARTADO A - pmfs condicionales $p_{Y|X}(y_j|x_i)$ y $p_{X|Y}(x_i|y_j)$

$$\textcircled{*} p_{X|Y}(x_i|y_j) = \frac{p_{xy}(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)} = \frac{K(2x_i + y_j)}{K(2 + y_j) + K(4 + y_j)} = \frac{2x_i + y_j}{2y_j + 6} \quad x_i = 1, 2; y_j = 1, 2;$$

$$\textcircled{*} p_{Y|X}(x_i|y_j) = \frac{p_{xy}(x_i, y_j)}{p_X(x_i)} = \frac{K(2x_i + y_j)}{K(2x_i + 1) + K(2x_i + 2)} = \frac{2x_i + y_j}{4x_i + 3} \quad x_i = 1, 2; y_j = 1, 2;$$

* Aplicación del Teorema de Bayes
* Aplicación del Teorema de la probabilidad total

APARTADO B

$$* P[Y=2|X=2] = \frac{6}{10}$$

$$* P[X=2|Y=2] = \frac{6}{11}$$

EJERCICIO 5

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} e^{-y} & x > 0, y > 0; \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

APARTADO A - determinar $P[X > 1 | Y = 1]$

$$P[X > 1 | Y = 1] = \int_1^{\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} e^{-1} dx = e^{-1} \int_1^{\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} dx = e^{-1} [e^{-\frac{x}{2}}]_1^{\infty} = e^{-1} (e^{-\frac{\infty}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}) = e^{-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{3}{2}}$$

EJERCICIO 6

$$P_{XY}(x_i, y_j) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (0,1), (1,0), (2,1); \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

APARTADO A - ¿Son X e Y independientes?

Calculamos:

$$* P(X=0) = \frac{1}{3}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{3}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{3}$$

$$* P(Y=0) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=1) = \frac{2}{3}$$

$$P_{XY}(0,1) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3} = P_X(0) \cdot P_Y(1)$$

NO SON INDEPENDIENTES

APARTADO B - ¿Están correladas? Si $Cov(X,Y) = 0$ no.

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E(X)E(Y)$$

$$E(X) = \sum_i x_i P(X=x_i) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

↑ esperanza matemática

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$E(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j P(x_i, y_j) = 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

$$Cov(X,Y) = \frac{2}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} = 0 \rightarrow \text{NO ESTÁN CORRELADAS.}$$

EJERCICIO 7

$$\begin{aligned} E[X] &= 0 & E[X^2] &= 2 & Corr[X,Y] &= -2 \\ E[Y] &= -1 & E[Y^2] &= 4 & E[XY] &= -2 \end{aligned}$$

$$\text{las nuevas variables } W \text{ e } U = \begin{cases} W = 2X + Y \\ U = -X - 3Y \end{cases}$$

APARTADO A - varianza de W e U:

$$\begin{aligned} Var[W] &= Var[2X+Y] = 2^2 Var[X] + Var[Y] + 2 \cdot 2 \cdot 1 Cov[X,Y] = 4Var[X] + Var[Y] + 4 \{Cov[X,Y] - E[X]E[Y]\} = 4 \{E[X^2] - (E[X])^2\} + \{E[Y^2] - (E[Y])^2\} - 8 = \\ &= 8 + 3 - 8 = 3 = Var[W] \end{aligned}$$

$$Var[U] = Var[-X-3Y] = Var[X] + 9Var[Y] + 6Cov[X,Y] = 2 + 9 \cdot 3 + 6(-2) = 2 + 27 - 12 = 17 = Var[U]$$

¡la esperanza es lineal!

APARTADO B - CORRELACIÓN DE W e U:

$$Corr[W,U] = E[WU] = E[(2X+Y)(-X-3Y)] = E[-2X^2 - 6XY - 4X - 3Y^2] = -2E[X^2] - 6E[XY] - 4E[X] - 3E[Y^2] = -2$$

APARTADO C - Covarianza de W e U:

$$Cov(W,U) = Corr(W,U) - E(W)E(U) = -2 - \{E(2X+Y) \cdot E(-X-3Y)\} = -2 - \{2E(X) + E(Y)\}(-E(X) - 3E(Y)) = -2 - (-3) = 1$$

EJERCICIO 8

APARTADO A - Determinar la media y la varianza de X e Y.

$$* \bar{x} = E[X] = \sum x_i \cdot P[X=x_i] = 0 \cdot P[X=0] + 1 \cdot P[X=1] = 0.5$$

$$* \bar{y} = E[Y] = \sum y_i \cdot P[Y=y_i] = 0 \cdot P[Y=0] + 1 \cdot P[Y=1] = 0.45$$

$$* Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 0.5 - (0.5)^2 = 0.25$$

$$\sum x_i^2 P[X=x_i] = 0.5$$

$$* Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 0.45 - (0.45)^2 = 0.2475$$

$$\sum y_i^2 P[Y=y_i] = 0.45$$

APARTADO C - Determinar la cov[X,Y]

$$Cov(X,Y) = Corr(X,Y) - E(X)E(Y) = E[XY] - E(X)E(Y)$$

$$E[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j P(x_i, y_j) = 1 \cdot 1 \cdot P(1,1) = 0.145$$

$$Cov(X,Y) = 0.145 - 0.5 \cdot 0.45 = 0.135$$

APARTADO D - Cf. de correlación $\rho_{X,Y}$

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var[X] \cdot Var[Y]}} = \frac{0.135}{\sqrt{0.25 \cdot 0.2475}} = 0.704$$

EJERCICIO 9

Con $X=2 \Rightarrow$ media condicional.
varianza condicional de Y .

Para la media condicional:

$$E[Y|X=2] = \sum y_j \cdot P(Y=y_j | X=2) = 1 \cdot P(Y=1|X=2) + 2 \cdot P(Y=2|X=2) = \frac{13}{11}$$

$$\frac{2x_i + y_j}{kx_i + 3}$$

* la calculamos en el ej 4.

y para la varianza:

$$V_{Y|X=2} = E[(Y - E[Y|X=2])^2 | X=2] = E[Y^2 | X=2] - (E[Y|X=2])^2 = \frac{30}{121}$$

↑ ojo a la equivalencia.

en las soluciones de la teacher sale $\frac{330}{1531}$, ¿de dónde? Ni idea...

EJERCICIO 10

$$f_{XYZ}(x, y, z) = \begin{cases} Ke^{-(ax+by+cz)} & x>0, y>0, z>0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

K, a, b, c son cte.

$$e^{-ax-by-cz} = \underbrace{e^{-ax}}_{f_1(x)} \cdot \underbrace{e^{-by}}_{f_2(y)} \cdot \underbrace{e^{-cz}}_{f_3(z)}$$

APARTADO A - Determinar valor de K .

Sabemos que $\iiint f_{XYZ}(x, y, z) dx dy dz = 1$, entonces: $1 = \iiint_0^{\infty} Ke^{-(ax+by+cz)} dx dy dz \stackrel{\text{Aplico T}^3 \text{ de Fubini}}{=} K \int_0^{\infty} e^{-ax} dx \int_0^{\infty} e^{-by} dy \int_0^{\infty} e^{-cz} dz =$

$$1 = \frac{K}{abc} \Leftrightarrow \boxed{K=abc}$$

$$\frac{1}{a} e^{-ax} \Big|_0^{\infty} \quad \frac{1}{b} e^{-by} \Big|_0^{\infty} \quad \frac{1}{c} e^{-cz} \Big|_0^{\infty}$$

Teorema de Fubini

Dado un producto de funciones univariadas,

$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, y el dominio de integración

en el producto cartesiano de dominios independientes, $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$, entonces la integral múltiple

$$\iint f(x, y) dx dy = \left(\int f_1(x) dx \right) \left(\int f_2(y) dy \right)$$

APARTADO B - Determinar pdf conjunta de X e Y :

$$f_{XY}(x, y) = \int f_{XYZ}(x, y, z) dz = K \int_0^{\infty} e^{-ax-by-cz} dz = K e^{-ax-by} \int_0^{\infty} e^{-cz} dz = K e^{-(ax+by)} \frac{1}{c} = \underline{\underline{abe^{-(ax+by)}}}$$

APARTADO C - Determinar la pdf marginal de X

$$f_X(x) = \iint f_{XYZ}(x, y, z) dy dz = K \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-ax-by-cz} dy dz \stackrel{\text{T}^2 \text{ Fubini}}{=} K e^{-ax} \int_0^{\infty} e^{-by} dy \int_0^{\infty} e^{-cz} dz = \underline{\underline{ae^{-ax}}}$$

APARTADO D - ¿Son X, Y, Z independientes?

* Como hemos podido aplicar el T³ de Fubini, sí!

$$f_{XYZ}(x, y, z) = abc e^{-ax-by-cz} = a e^{-ax} b e^{-by} c e^{-cz} \rightarrow \text{es trivial la independencia, no hay mezcla de incógnitas en producto ni cocientes, es decir, cosas como } xz, \frac{y}{x}, \text{ etc.}$$

EJERCICIO 11

Tenemos $Y = E^X$, siendo X una var. aleatoria uniforme sobre el intervalo $\left[\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right]$.

Entonces, la pdf (función densidad de probabilidad) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$, siendo a y b los extremos del intervalo en el que la var. alea. unif. está definida. Entonces:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}, \text{ y } E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} e^x f_X(x) dx = \int_0^1 e^x dx = \underline{\underline{e-1}}$$

EJERCICIO 12

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} K & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad K \text{ cte.} \quad f_{XY}(x, y) = \begin{cases} K & 0 < y-x < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

APARTADO A - determinar el valor de K .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1 \Rightarrow \int_0^1 K dx \int_0^x dy = \int_0^1 Kx dx = K \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{K=2}$$

Aplico el T² de Fubini

APARADO B - Medias condicionales $E[Y|X]$ e $E[X|Y]$.

→ Para $E[Y|X] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(x,y) dy \Rightarrow$ Busco $f_{Y|X}(x,y)$

$$f_{Y|X}(x,y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \Rightarrow f_{Y|X}(x,y) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x} \Rightarrow E[Y|X] = \int_0^x y \frac{1}{x} dy = \frac{x}{2} \quad 0 < x < 1$$

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 < y-x < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad f_X(x) = \int_0^x 2 dy = 2x$$

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2}{2(1-y)} = \frac{1}{1-y} \Rightarrow E[X|Y] = \int_y^1 x \frac{1}{1-y} dx = \frac{1}{1-y} \left[\frac{x^2}{2} \right]_y^1 = \frac{1}{1-y} \frac{(1-y^2)}{2} = \frac{1+y}{2(1-y)} \quad 0 < y < 1$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 2 dx = 2(1-y)$$

APARADO C

$$\text{VAR}[Y|X] = E[Y^2|X] - (E[Y|X])^2 = \frac{x^2}{3} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{4} = x^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$E[Y^2|X] = \int_0^x y^2 \frac{1}{x} dy = \frac{1}{x} \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{3}$$

$$\text{VAR}[X|Y] = E[X^2|Y] - (E[X|Y])^2 = \frac{1-y^3}{3(1-y)} - \left(\frac{1+y}{2(1-y)}\right)^2$$

$$E[X^2|Y] = \int_y^1 x^2 \left(\frac{1}{1-y}\right) dx = \frac{1}{1-y} \left(\frac{1-y^3}{3}\right) = \frac{1+y^3}{3(1-y)}$$