

Resolución de ejercicios del

Tema 6

Campo magnético

(Ejercicios 1-9)



6.1. Una partícula puntual de masa m y carga q incide con una velocidad inicial v_0 , paralela al eje x , sobre una zona de inducción magnética $\vec{B}$ uniforme, de módulo B y siguiendo la dirección del eje z . Se observa que en esta región la partícula describe una trayectoria circular de radio R con una velocidad de módulo constante e igual a v_0 . Dicha trayectoria está incluida en un plano paralelo al plano xy . Calcular la carga de la partícula, supuesto conocidos B , v_0 , m y R . (Sol: $q = mv_0/(RB)$)

6.2. Hallar la inducción magnética $\vec{B}$ producida por una espira cuadrada de lado a recorrida por una intensidad de corriente I , en un punto cualquiera de su eje. Repetir el problema para una espira rectangular. (Sol: $\vec{B}(z) = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I a^2}{\pi(a^2 + 4z^2)\sqrt{a^2 + 2z^2}} \hat{k}$)

6.3. Hallar el campo magnético $\vec{B}$ producido por una espira circular de radio a recorrida por una intensidad de corriente I , en un punto de su eje muy lejano. (Sol: $\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \hat{k}$)

6.4. Hallar la inducción magnética $\vec{B}$ producida en cualquier punto del espacio por un cable coaxial de radios a y b ($b > a$) y permeabilidad magnética μ_0 , sabiendo que circula una intensidad I por el cable interior (corriente volúmica) y la misma pero en sentido contrario, por el exterior (corriente superficial). ¿Qué le ocurre al campo magnético fuera del cable? (Nota: Un cable coaxial se puede considerar como un cilindro conductor recto indefinido rodeado por una carcasa conductora de espesor despreciable) (Sol: para $\rho < a$, $\vec{B} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \hat{\varphi}$; para $a \leq \rho \leq b$, $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\varphi}$; para $\rho > b$, $\vec{B} = \vec{0}$)

6.5. Hallar el campo magnético $\vec{B}$ producido por un solenoide finito de sección circular de radio a , de longitud L , con un número de espiras uniforme n por unidad de longitud, en un punto cualquiera de su eje. Suponga que las espiras están muy juntas y recorridas por una intensidad de corriente I . Examinar el resultado cuando L tiende a infinito. (Sugerencia: situar el origen del sistema de coordena-

das en el centro del solenoide y descomponer el solenoide finito en muchas espiras circulares infinitamente juntas de radio a recorridas por una intensidad diferencial proporcional a I/L). (Sol: $\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} \hat{k} \left(\frac{z+L/2}{\sqrt{a^2+(z+L/2)^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{a^2+(z-L/2)^2}} \right)$)

6.6. Un conductor rectilíneo largo y una espira rectangular de alambre yacen sobre una mesa de tal manera que el conductor es paralelo a los lados más cortos de la espira y está a una distancia d de ella. La espira tiene de lado menor a y mayor b y está recorrida por una corriente I_e en sentido antihorario, y el conductor rectilíneo por una corriente I_c hacia arriba. a) Hallar la fuerza que ejerce el conductor sobre la espira. b) ¿Cuál es el valor de esta fuerza si los lados largos de la espira se consideran como conductores rectilíneos indefinidos ($b \rightarrow \infty$)? c) ¿La fuerza del apartado a) será igual a la fuerza que ejerce la espira sobre el conductor? (Sol: a) $\vec{F}_{c \rightarrow e} = \frac{\mu_0 a b I_e I_c}{2\pi d(b+d)} \hat{i}$, si el hilo es coincidente con el eje y y su corriente circula hacia la dirección positiva del eje, mientras la espira se encuentra en el plano xy y la corriente circula en sentido antihorario visto desde el eje z , b) $\vec{F}_{c \rightarrow e} \approx \frac{\mu_0 a I_e I_c}{2\pi d} \hat{i}$, c) Sí)

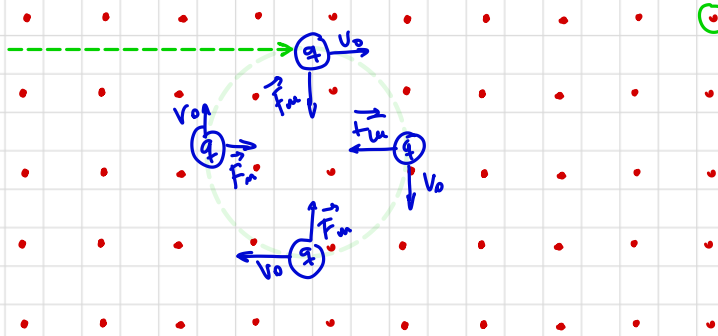
6.7. Considere un plano conductor indefinido por el que circula una corriente uniformemente distribuida sobre el conductor, dando lugar a una densidad superficial de corriente J_0 (A/m). Calcular el campo magnético que crea esta corriente en cualquier punto del espacio. (Sol: En los apuntes)

6.8. Hallar el campo magnético producido por un disco de radio a con densidad superficial de carga ρ_s que gira con velocidad angular ω alrededor de su eje, en un punto cualquiera del mismo. Pista: escribir la densidad de corriente superficial sobre el disco recordando que la velocidad lineal de cualquier punto del disco depende de la distancia al centro y de la velocidad angular. (Sol: $\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \rho_s \omega}{2} \left(\frac{2z^2+a^2}{\sqrt{z^2+a^2}} - 2z \right) \hat{k}$)

6.9. Sea un tubo de corriente recto indefinido, de sección circular y radio a , que está recorrido por una densidad de corriente uniforme J_0 (A/m²) salvo una cavidad cilíndrica, de radio b , con $b < a/2$, cuyo eje se encuentra a una distancia c del eje del tubo ($c < a$ y $c+b < a$) y paralelo a este. Hallar el campo magnético creado por esta distribución de corriente dentro de la cavidad, en cualquier punto de la recta que une los centros del tubo y de la cavidad. (Sol: $\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 c}{2} \hat{j}$, si los ejes de los cilindros son paralelos al eje z , la corriente en sentido positivo del eje, y los ejes cortando el eje x)

6.10.** Sea una espira cuadrada de lado a cuyo centro está localizado en el origen de coordenadas $(0,0,0)$ y por la que circula una intensidad de corriente I_1 . Sea también una espira circular de radio $a/2$ cuya superficie es paralela a la superficie de la espira cuadrada pero con centro en la coordenada $(0,0,a)$ y recorrida por una intensidad I_2 . ¿Qué condiciones han de darse para que el campo magnético total sea nulo en el centro de esta última?

6.1. Una partícula puntual de masa m y carga q incide con una velocidad inicial v_0 , paralela al eje x , sobre una zona de inducción magnética $\vec{B}$ uniforme, de módulo B y siguiendo la dirección del eje z . Se observa que en esta región la partícula describe una trayectoria circular de radio R con una velocidad de módulo constante e igual a v_0 . Dicha trayectoria está incluida en un plano paralelo al plano xy . Calcular la carga de la partícula, supuesto conocidos B , v_0 , m y R . (Sol: $q = mv_0/(RB)$)



denotan la dirección del campo. (hacia fuera)

Para resolver este ejercicio haremos uso de la definición de Fuerza Magnética que obtenemos de la Ley de fuerzas de Lorentz: $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$.

Representamos el campo magnético, y con la regla de la mano derecha para el producto vectorial, conseguimos el sentido y dirección de la fuerza que sufre la partícula (ver dibujo).

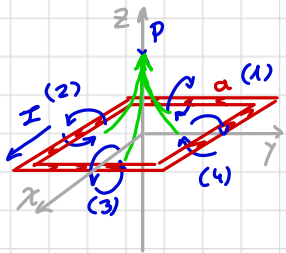
En verde representada la trayectoria de la partícula.

Observamos que la partícula adopta un movimiento circular, que es posible gracias a una fuerza tangencial y normal.

Vemos que la $\vec{F}_{normal} = \vec{F}_{magnética}$, es decir, $mv_0^2/R = qv_0B \cdot \cos(\alpha)$, o lo que es lo mismo, $m \frac{v_0^2}{R} = qv_0B \cdot \cos(\alpha) \Leftrightarrow q = \frac{mv_0}{RB}$.

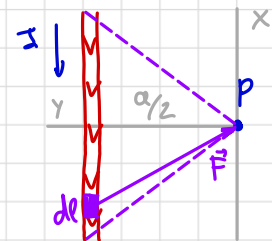
6.2. Hallar la inducción magnética $\vec{B}$ producida por una espira cuadrada de lado a recorrida por una intensidad de corriente I , en un punto cualquiera de su eje.

Repetir el problema para una espira rectangular. (Sol: $\vec{B}(z) = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I a^2}{\pi(a^2 + 4z^2)\sqrt{a^2 + 2z^2}} \hat{k}$)



Para resolver este ejercicio haremos uso del principio de superposición y la Ley de Biot y Savart. La clave de este problema está en interpretar que el campo magnético en el punto P es el campo resultante de la suma del campo producido por los cuatro lados a . (En verde la contribución total que converge en el punto).

Por tanto, para calcular el campo total nos bastará con conocer como se comporta un lado para luego extrapolarlo a los demás.



El campo en P producido por un solo lado ⁽¹⁾ será $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$. Con $I = I$, denotando la intensidad de corriente que circula por la espira, $d\vec{l}' = -dx\hat{i}$ como la longitud de los trozos infinitesimales de la espira, $\vec{r}_0$ indicando la posición en el espacio de dicho trozo $\vec{r}_0 = x'\hat{i} + \frac{a}{2}\hat{j}$, y la posición $\vec{r}$ indicando el punto del eje donde mide el campo magnético.

lo ponemos por que la corriente va en sentido negativo ox.

Entonces: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I(-dx\hat{i}) \times (z\hat{k} - x\hat{i} - \frac{a}{2}\hat{j})}{(x^2 + (\frac{a}{2})^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{-dx\hat{i} \times z\hat{k} - dx\hat{i} \times (-x\hat{i}) - dx\hat{i} \times (-\frac{a}{2}\hat{j})}{(x^2 + (\frac{a}{2})^2 + z^2)^{3/2}} =$ [Hacemos los productos vectoriales] $\Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +\hat{j}$ $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\hat{i}) \times (-\hat{i}) = 0$ $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = +\hat{k}$

hacemos el producto vectorial

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{dx \cdot z \hat{j} + dx \cdot \frac{a}{2} \hat{k}}{(x^2 + (\frac{a}{2})^2 + z^2)^{3/2}}$ El campo tiene componente y/z . Las "y" en se cancelarán con el lado paralelo, por tanto $\vec{B}$ en $\hat{r}$ será $4\vec{B}_z$. Integral resuelta por máxima

$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{dx \cdot \frac{a}{2} \hat{k}}{(x^2 + (\frac{a}{2})^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{2} \hat{k} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{(x^2 + (\frac{a}{2})^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{2} \left[\frac{x}{(z^2 + \frac{a^2}{4}) \sqrt{x^2 + z^2 + \frac{a^2}{4}}} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{a\sqrt{z^2}}{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}} (4z^2 + a^2)} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{a^2 \sqrt{z}}{(4z^2 + a^2) \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}}$

Como $\vec{B}_T(z) = 4\vec{B}_z = 4 \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{a^2 \sqrt{z}}{(4z^2 + a^2) \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \cdot \frac{2a^2 \sqrt{z}}{(4z^2 + a^2) \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}}$

6.3. Hallar el campo magnético $\vec{B}$ producido por una espira circular de radio a recorrida por una intensidad de corriente I , en un punto de su eje muy lejano.

(Sol: $\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \hat{k}$)

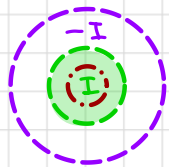
Demostración en el libro, Aplicando la ley de Biot y Savart, $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\ell' \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \Leftrightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{a^2 \mu_0 I}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$.
 páginas 200 y 201. Como $z \gg a$, la contribución de a en la suma $z+a$ es insignificante, por tanto:

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{a^2 \mu_0 I}{2(z^2)^{3/2}} = \frac{a^2 \mu_0 I}{2z^3}$

6.4. Hallar la inducción magnética $\vec{B}$ producida en cualquier punto del espacio por un cable coaxial de radios a y b ($b > a$) y permeabilidad magnética μ_0 , sabiendo que circula una intensidad I por el cable interior (corriente volumétrica) y la misma pero en sentido contrario, por el exterior (corriente superficial). ¿Qué le ocurre al campo magnético fuera del cable? (Nota: Un cable coaxial se puede considerar como un cilindro conductor recto indefinido rodeado por una carcasa conductora de espesor despreciable) (Sol: para $\rho < a$, $\vec{B} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \hat{\phi}$; para $a \leq \rho \leq b$, $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\phi}$; para $\rho > b$, $\vec{B} = \vec{0}$)

Resolver este ejercicio es sencillo. Tenemos que hacer uso de la ley de Ampère para hallar la inducción magnética en cualquier punto del espacio. Estamos ante un ejercicio de simetría cilíndrica. Asumimos una circunferencia de radio variable ρ , que usaremos para medir el campo magnético en los tres casos presentados:

CASO DENTRO DEL CONDUCTOR



CABLE COAXIAL

En este caso, la circunferencia de radio r tendrá como mucho el radio del conductor, en decir, $r \leq a$.

Aplicando el T^a de Ampère, en casos generales, el campo magnético producido por un hilo infinito es $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$,

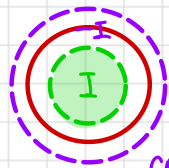
sin embargo, eso sería cierto exclusivamente en el caso $r=a$, pero nosotros sabemos que r puede ser menor que a . En ese caso, tendremos que descubrir cuánta corriente circula a través de la circunferencia de radio r , que puede no ser toda.

En dicho caso, apelamos a la ley de Gauss: $I' = \int_S \mathbf{j}_v \cdot d\vec{S} = j_v S$, con $S = \pi r^2$ (área), entonces la corriente que circula a través de la superficie delimitada por la circunferencia. Sabiendo que $r=r$, entonces $I' = j_v \cdot \pi r^2$.

Como j_v es la densidad de corriente volumétrica que circula por el conductor, $j_v = \frac{I}{\pi a^2}$, entonces, $I' = \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi r^2 = I \frac{r^2}{a^2}$.

Entonces, el campo creado será $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi a^2} \hat{\phi}$

CASO FUERA DEL CONDUCTOR, DENTRO DEL CABLE COAXIAL



CABLE COAXIAL

Volvemos a aplicar el T^a de Ampère, pero con $a < r \leq b$. En este caso, precisaremos de la expresión general que presente:

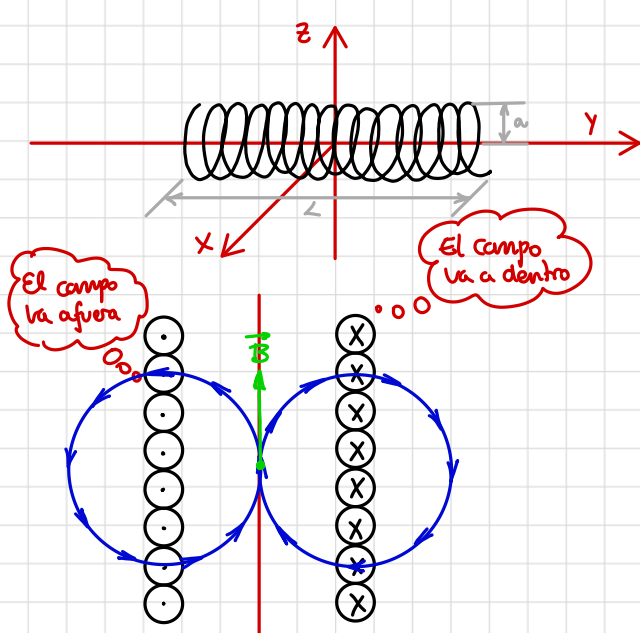
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

CASO FUERA DEL CABLE

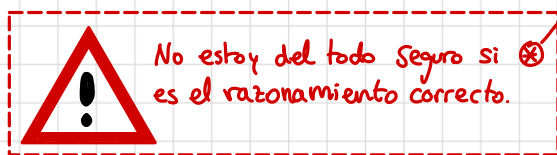
La superficie que recubre el conductor contiene una corriente de módulo idéntico al conductor, pero en sentidos opuestos. Entonces, los campos magnéticos creados por ambos se cancelan. $\vec{B} = \vec{0}$.

6.5. Hallar el campo magnético $\vec{B}$ producido por un solenoide finito de sección circular de radio a , de longitud L , con un número de espiras uniforme n por unidad de longitud, en un punto cualquiera de su eje. Suponga que las espiras están muy juntas y recorridas por una intensidad de corriente I . Examinar el resultado cuando L tiende a infinito. (Sugerencia: situar el origen del sistema de coordena-

das en el centro del solenoide y descomponer el solenoide finito en muchas espiras circulares infinitamente juntas de radio a recorridas por una intensidad diferencial proporcional a I/L). (Sol: $\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} \hat{k} \left(\frac{z+L/2}{\sqrt{a^2+(z+L/2)^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{a^2+(z-L/2)^2}} \right)$)



* Para saber la dirección y sentido de las líneas de campo uso la REGLA de la mano derecha.



La clave de este ejercicio viene en la sugerencia. 1º) Centramos el solenoide y 2º) lo dividimos en espiras circulares infinitamente juntas.

Para resolverlo, aplicaremos la Ley de Biot y Savart: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{e}' \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$ para una sola espira circular $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + y^2)^{3/2}} \hat{j}$.

Un solenoide consiste en la superposición de n espiras en una longitud L . Para calcular el campo total, hemos de integrar la expresión anterior a lo largo de la longitud. Para ello, disponemos de la siguiente igualdad: $dI = \frac{I}{L} dy$. Por ende, nuestra expresión resulta en:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_L \frac{\mu_0 I a^2 n}{2(a^2 + y^2)^{3/2}} dy \hat{j} = \frac{\mu_0 I a^2 n}{2} \int_L \frac{dy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \hat{j} = \frac{\mu_0 I a^2 n}{2} \left[\frac{y}{a^2 \sqrt{y^2 + a^2}} \right]_L \hat{j} =$$

Establecemos los límites de integración, como nuestro solenoide está centrado, integramos de $y + \frac{L}{2}$ a $y - \frac{L}{2}$. Esto es para mantener siempre el cálculo del campo en el centro del solenoide.

$$\vec{B}(y) = \frac{\mu_0 I a^2 n}{2} \left[\frac{y}{a^2 \sqrt{y^2 + a^2}} \right]_{y - \frac{L}{2}}^{y + \frac{L}{2}} \hat{j} = \frac{\mu_0 I n}{2} \left[\frac{y + \frac{L}{2}}{\sqrt{a^2 + (y + \frac{L}{2})^2}} - \frac{y - \frac{L}{2}}{\sqrt{a^2 + (y - \frac{L}{2})^2}} \right] \hat{j}.$$

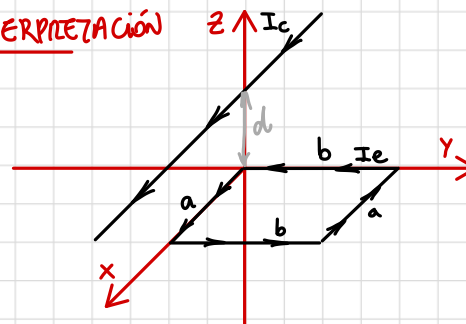
En el libro sale con z . Todo depende de cómo consideramos el solenoide. En nuestro caso lo hemos considerado en y .

¿ $L \rightarrow \infty$? Cuando L tiende a infinito, $\vec{B}(y) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 I n}{2} \left[\frac{y + \frac{L}{2}}{\sqrt{a^2 + (y + \frac{L}{2})^2}} - \frac{y - \frac{L}{2}}{\sqrt{a^2 + (y - \frac{L}{2})^2}} \right] \hat{j} = \frac{\mu_0 I n}{2} [2] = \underline{\underline{\mu_0 I n}}$.

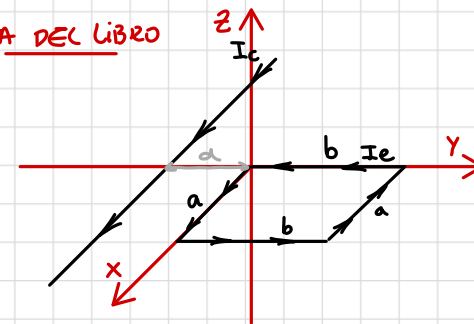
Handwritten notes above the equation:
 $\frac{\infty}{\infty} = \text{IND} = 1$
 $\frac{-\infty}{\infty} = \frac{-1}{1} = -1$

6.6. Un conductor rectilíneo largo y una espira rectangular de alambre yacen sobre una mesa de tal manera que el conductor es paralelo a los lados más cortos de la espira y está a una distancia d de ella. La espira tiene de lado menor a y mayor b y está recorrida por una corriente I_e en sentido antihorario, y el conductor rectilíneo por una corriente I_c hacia arriba. a) Hallar la fuerza que ejerce el conductor sobre la espira. b) ¿Cuál es el valor de esta fuerza si los lados largos de la espira se consideran como conductores rectilíneos indefinidos ($b \rightarrow \infty$)? c) ¿La fuerza del apartado a) será igual a la fuerza que ejerce la espira sobre el conductor? (Sol: a) $\vec{F}_{c \rightarrow e} = \frac{\mu_0 a b I_e I_c}{2\pi d(b+d)} \hat{i}$, si el hilo es coincidente con el eje y y su corriente circula hacia la dirección positiva del eje, mientras la espira se encuentra en el plano xy y la corriente circula en sentido antihorario visto desde el eje z , b) $\vec{F}_{c \rightarrow e} \approx \frac{\mu_0 a I_e I_c}{2\pi d} \hat{i}$, c) Sí)

MI INTERPRETACIÓN



LA DEL LIBRO



Ejercicio con problemas objetividad. Varias posibles interpretaciones.

Asumimos el caso ② por el solucionario. Si encuentras esta ambigüedad en el examen, informa y pregunta a tu profesor/a.

A) La fuerza magnética ejercida entre dos conductores viene dado por $\vec{F}_m = I \vec{\ell} \times \vec{B} = I a B \cdot \cos(\alpha)$ ↗ en este caso son $\perp$, entonces $\rightarrow F_m = I a B$

Con la ley de Ampère, sacamos la expresión de campo magnético creado por un hilo conductor: $\oint \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 I_s = \begin{cases} \oint B d\vec{r} = B(r) 2\pi r \\ \mu_0 I_s = \mu_0 I \end{cases} \Rightarrow$

$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ CAMPO MAGNÉTICO EN LA ESPIRA

* LADO ESPIRA CERCANA $B(d) = \frac{\mu I_e}{2\pi d}$

* LADO ESPIRA LEJANA

$B(d+b) = -\frac{\mu I_e}{2\pi(d+b)}$

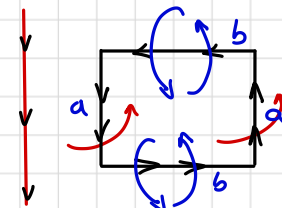
SUPERPOSICIÓN $\Rightarrow B = \frac{\mu I_e}{2\pi} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+b} \right) = \frac{\mu I_e}{2\pi} \left(\frac{b}{d(d+b)} \right) = \frac{\mu I_e b}{2\pi d(d+b)}$

Entonces, $\vec{F}_m = \frac{\mu I_e b I_c a}{2\pi d(d+b)} \hat{i}$

B) $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\mu I_e b I_c a}{2\pi d(d+b)} = \frac{\mu I_e I_c a}{2\pi d} = \vec{F}_m$

o o $b \rightarrow \infty$, y $b+d$ también. $b \gg d$, entonces la aportación de d será insignificante dando lugar a que $b \approx b+d$ si $b \rightarrow \infty$. la expresión se reescribe como $\frac{\mu I_e I_c a b}{2\pi d b} = \frac{\mu I_e I_c a}{2\pi d}$.

c) Sí.



6.7. Considere un plano conductor indefinido por el que circula una corriente uniformemente distribuida sobre el conductor, dando lugar a una densidad superficial de corriente J_0 (A/m). Calcular el campo magnético que crea esta corriente en cualquier punto del espacio. (Sol: En los apuntes)

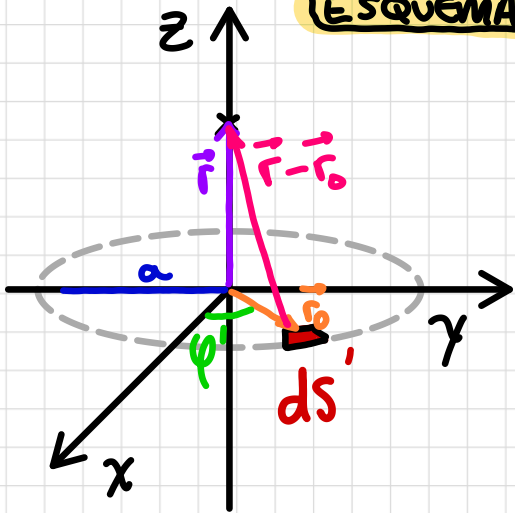
En este ejercicio se aplica el Teorema de Ampère.

$\oint \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 I_s \Rightarrow B(|z|) = \frac{\mu_0 J_0}{2}$ o pags 207-210.

[Firma]

6.8. Hallar el campo magnético producido por un disco de radio a con densidad superficial de carga ρ_s que gira con velocidad angular ω alrededor de su eje, en un punto cualquiera del mismo. Pista: escribir la densidad de corriente superficial sobre el disco recordando que la velocidad lineal de cualquier punto del disco depende de la distancia al centro y de la velocidad angular. (Sol: $\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \rho_s \omega}{2} \left(\frac{2z^2 + a^2}{\sqrt{z^2 + a^2}} - 2z \right) \hat{k}$)

ESQUEMA



Aplicamos la ley de Biot y Savart: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I' d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} = \begin{cases} \vec{r} = z \hat{k} \\ \vec{r}_0 = r_0 \cos(\varphi) \hat{i} + r_0 \sin(\varphi) \hat{j} \\ I' = \rho_s \cdot \omega r_0^2 \hat{\varphi} \\ ds = r_0 dr_0 d\varphi \\ \vec{r} - \vec{r}_0 = -r_0 \cos(\varphi) \hat{i} - r_0 \sin(\varphi) \hat{j} + z \hat{k} \end{cases}$

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{ds' \rho_s \omega r_0 (-\sin(\varphi) \hat{i} + \cos(\varphi) \hat{j}) \times (-r_0 \cos(\varphi) \hat{i} - r_0 \sin(\varphi) \hat{j} + z \hat{k})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} =$

$\hat{\varphi} = -\sin(\varphi) \hat{i} + \cos(\varphi) \hat{j}$

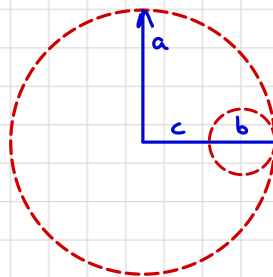
$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{ds' \rho_s \omega r_0 z (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{ds' \rho_s \omega r_0 z \hat{k}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho_s \omega r_0 z dr_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} d\varphi =$

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2\pi \int_0^a \frac{\rho_s \omega r_0 z dr_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \hat{k} \Leftrightarrow \frac{\mu_0 \rho_s \omega z}{2} \int_0^a \frac{r_0 dr_0}{(z^2 + r_0^2)^{3/2}} \hat{k} = \begin{cases} u = r_0^2 + z^2 \rightarrow \text{despejo } r_0 \\ du = 2r_0 dr_0 \rightarrow \text{despejo } dr_0 \end{cases} \int_{z^2}^{a^2+z^2} \frac{1}{u^{3/2}} du =$

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \rho_s \omega z}{2} \int_{z^2}^{a^2+z^2} \frac{1}{u^{3/2}} du \hat{k} = \frac{\mu_0 \rho_s \omega z}{4} \left(\int_{z^2}^{a^2+z^2} \frac{1}{u^{3/2}} du - \int_{z^2}^{a^2+z^2} \frac{z^2}{u^{3/2}} du \right) \hat{k}$

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \rho_s \omega z}{4} \left(2(\sqrt{a^2+z^2} - z) - z^2 \left(\frac{2}{z} + \frac{2}{\sqrt{z^2+a^2}} \right) \right) \hat{k} = \frac{\mu_0 \rho_s \omega z}{2} \left(\sqrt{a^2+z^2} - z - z + \frac{z^2}{\sqrt{a^2+z^2}} \right) \hat{k} = \frac{\mu_0 \rho_s \omega z}{2} \left(\frac{a^2+z^2}{\sqrt{a^2+z^2}} - 2z \right) \hat{k}$

6.9. Sea un tubo de corriente recto indefinido, de sección circular y radio a , que está recorrido por una densidad de corriente uniforme J_0 (A/m²) salvo una cavidad cilíndrica, de radio b , con $b < a/2$, cuyo eje se encuentra a una distancia c del eje del tubo ($c < a$ y $c+b < a$) y paralelo a este. Hallar el campo magnético creado por esta distribución de corriente dentro de la cavidad, en cualquier punto de la recta que une los centros del tubo y de la cavidad. (Sol: $\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 c}{2} \hat{j}$, si los ejes de los cilindros son paralelos al eje z , la corriente en sentido positivo del eje, y los ejes cortando el eje x)



Este ejercicio requiere aplicar el teorema de Ampère: $\oint B d\vec{r} = \mu_0 I_s$. Se trata de un ejercicio de simetría cilíndrica dentro del conductor. El $\vec{r}^2$ de Ampère nos da la siguiente expresión de campo: $B(\rho) = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}$.

Con $\mu_0 I = \mu_0 J_0 \pi a^2$, $B(\rho) = \frac{\mu_0 J_0 \rho}{2}$. El campo magnético creado por la cavidad al producido por el tubo. Esto es porque en la cavidad se genera un campo de sentido contrario.

por el tubo será $B(a) = \frac{\mu_0 J_0 a}{2}$ y en la cavidad $B(a-c) = \frac{\mu_0 J_0 (a-c)}{2}$. Ahora bien, para obtener el campo total debemos de restar el campo producido por la cavidad al producido por el tubo.

$B_{\text{total}} = \frac{\mu_0 J_0 a}{2} - \frac{\mu_0 J_0 (a-c)}{2} = \frac{\mu_0 J_0 c}{2}$