

EJERCICIOS TEMA 5 - SISTEMAS LINEALES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Ejercicio 5.1 Calcule la convolución de las siguientes funciones

a) $x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$ y $h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$

b) $y(t) = 2Au(t) - Au(t-1) - Au(t-2)$ y $z(t) = u(t) - u(t-3)$



La convolución es un procedimiento que se emplea para conocer qué le va a pasar a una señal tras la activación de un sistema. $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$

A) $x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$
 $h(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 2T \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

Vamos a hacer la convolución $h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$

Hagamos los cambios de variable:

$x(t-\tau) = \begin{cases} 1 & 0 < t-\tau < T \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \iff \begin{cases} 1 & t-T < \tau < t \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

$\otimes 0 < t-\tau \iff$

$-t < -\tau \iff$

$t > \tau \dots$

$\otimes t-\tau < \tau \iff$

$-\tau < \tau - t \iff$

$\tau > t - \tau \dots$

$h(\tau) = \begin{cases} \tau & 0 < \tau < 2T \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

necesito tener solo a τ en el centro

$\dots \rightarrow t > \tau > t - T$

Ahora, vemos los intervalos de nuestras funciones a trozos:

$x(t) = \{ \text{trozos de } (-\infty, 0), (0, T) \text{ y } (T, +\infty) \}$

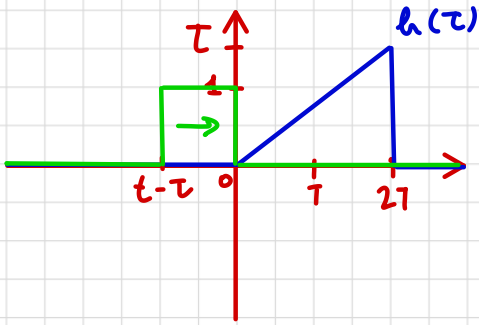
$h(t) = \{ \text{trozos de } (-\infty, 0), (0, 2T) \text{ y } (2T, +\infty) \}$

Al hacer el producto, vemos los intervalos que vamos a estudiar:

$h(t) * x(t) = \{ \text{trozos de } (-\infty, 0), (0, T), (T, 2T), (2T, +\infty) \} + \text{uno adicional.}$ Medimos el "tamaño de la distancia" de $x(t)$, en este caso T , y en vez de estudiar solo de $(2T, +\infty)$, consideramos los casos $(2T, 2T+T)$ y $(2T+T, +\infty)$.

Wego, los casos que estudiaremos serán:

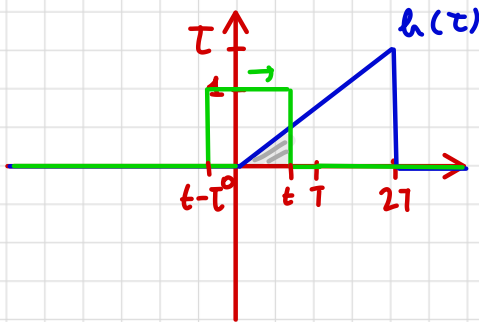
CASO $(-\infty, 0)$ $-\infty \leq t \leq 0$ En el primer caso las señales no se solapan, luego la convolución valdrá cero:



$$\int_{-\infty}^0 h(\tau) x(t-\tau) d\tau = h(t) * x(t) = 0.$$

la señal se mueve.

CASO $(0, T)$ $0 \leq t \leq T$



En este caso las señales se solapan.

Calculemos la convolución en el intervalo $(0, T)$ donde $T=t$.

$$\int_0^t h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_0^t \tau \cdot 1 d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_0^t = \frac{t^2}{2}$$

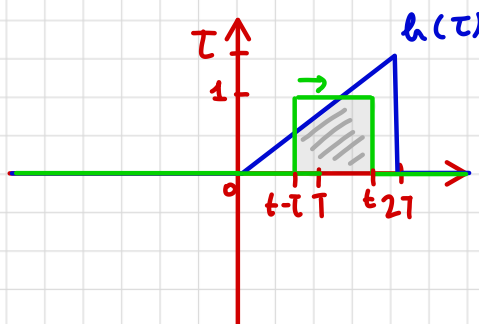
Siempre vale 1

↓
cuando $t < 2T$,
 $h(t) = t$, con $t = T$,

punto donde el que empieza a solapar

entonces $h(\tau) = \tau$.

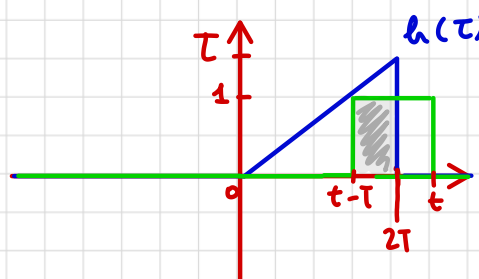
CASO $(T, 2T)$ $T \leq t \leq 2T$



En este caso, las señales se vuelven a solapar, luego la convolución será distinta de cero.

$$\int_{t-T}^t \tau \cdot 1 d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_{t-T}^t = \frac{t^2 - (t-T)^2}{2}$$

CASO $(2T, 3T)$ $2T \leq t \leq +\infty$



Aquí empiezan a no solaparse:

$$\int_{t-T}^{2T} \tau \cdot 1 d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_{t-T}^{2T} = \frac{4T^2 - (t-T)^2}{2}$$

← punto en el que ya no se solapan

CASO $(3T, +\infty)$

Este es trivial, $h(t) = 0$ cuando $t > 2T$, entonces la convolución vale cero.

$$\text{Solución: } h(t) * x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & 0 < t < T \\ \frac{(t^2 - (t-T)^2)}{2} & T < t < 2T \\ \frac{4t^2 - (t-T)^2}{2} & 2T < t < 3T \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

B) Hacemos lo mismo que antes.

$$y(t) = 2Au(t) - Au(t-1) - Au(t-2) \quad \text{y} \quad z(t) = u(t) - u(t-3) \quad \text{queda reescrito como:}$$

$$y(t) = \begin{cases} 2A & 0 < t < 1 \\ A & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

la señal tiene 2ud longitud.

$$z(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 3 \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

el impulso tiene 3ud longitud

Sustituimos en $z(t)$, $t = t - \tau$ y $\dots$ $z(t - \tau) = \begin{cases} 1 & t-3 < \tau < t \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$ y $y(t)$ con $t = \tau$, es trivial.

Intervalos de estudio:

- * $(-\infty, 0)$ el impulso está al límite de solaparse.
- * $(0, 1)$ un trozo comienza a entrar.
- * $(1, 2)$ más de la mitad del trozo se solapa.
- * $(2, 3)$ todo el trozo ha entrado pero está saliendo.
- * $(3, +\infty)$ el trozo sale.

CASO $(-\infty, 0)$

La convolución vale 0.

CASO $(0, 1)$

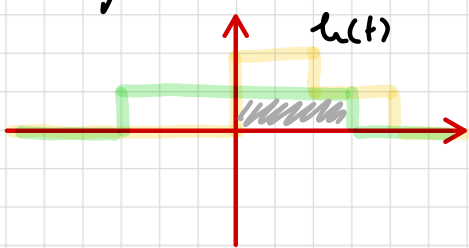
El impulso empieza a solaparse con la señal.

$$\int_0^t 2A \cdot 1 d\tau = 2A[\tau]_0^t = 2A\tau.$$

↑ donde empieza

CASO (1,2)

Más trozo de impulso se solapa con la señal. Una parte solapa con $2A$ y la otra con A :



$$\int_0^1 2A \cdot 1 d\tau + \int_1^t A \cdot 1 d\tau = 2A + A\tau - A = A(1+t)$$

CASO (2,3)

El trozo comienza a salir y termina de entrar:

$$\int_0^1 2A \cdot 1 d\tau + \int_1^2 A \cdot 1 d\tau = 3A$$

CASO (3, +∞)

El trozo solo sale, entonces:

* Cuando el trozo ha salido un poco, pero el resto está solapando con $2A$ y A :

$$\int_{t-1}^1 2A \cdot 1 d\tau + \int_1^2 A \cdot 1 d\tau = 3A - 2A(t-1)$$

este intervalo es
pared en $t=2+1$ ud
que sale el trozo
(3,4)

* Cuando el trozo ha salido lo suficiente para solo estar solapando con A :

$$\int_{t-1}^2 A d\tau = A \int_{t-1}^2 1 \cdot d\tau = 2A - A(t-1)$$

esta es la anterior
más otra ud que
sale el trozo
(4,5)

la solución entonces será $y(t) * z(t) =$

$2At$	$0 < t < 1$
$A(1+t)$	$1 < t < 2$
$3A$	$2 < t < 3$
$3A - 2A(t-1)$	$3 < t < 4$
$2A - A(t-1)$	$4 < t < 5$

⚡ la clave de la convolución está en comprender que la señal con $t-\tau$ se desplaza con el tiempo.

Ejercicio 5.2 Obtenga la salida del sistema dado en la Figura 1:

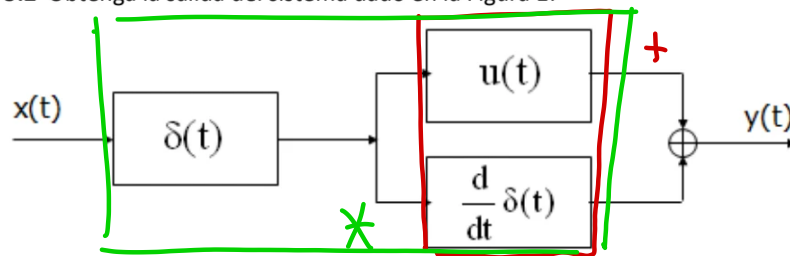


Figura 1. Sistema para el ejercicio 5.2.

$$y(t) = \delta(t) * \left(u(t) + \frac{d}{dt} \delta(t) \right) x(t) =$$

$$y(t) = \cancel{x(t)\delta(t)} u(t) + \cancel{x(t)\delta(t)} \frac{d}{dt} \delta(t) =$$

$$y(t) = x(t)u(t) + x(t)\frac{d}{dt}\delta(t) \Rightarrow \text{convoluciones:}$$

$$x(\tau)\delta(t-\tau) = x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \frac{d}{dt} \delta(t-\tau) d\tau = \frac{d}{dt} x(t)$$

restringe el
limite hasta t .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau //$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau + \frac{d}{dt} x(t) //$$

Ejercicio 5.3 Dados las siguientes respuestas impulsivas

- $f(t) = e^{-4t}u(-t)$
- $g(t) = \text{sen}(t)u(t)$
- $h(t) = 3\delta(t) + tu(t)$
- $v(t) = e^{-t}u(t)$

- a) Obtenga la salida de los sistemas para la entrada $x(t) = e^{-3t}u(t)$
 b) Determine si los sistemas anteriores son causales o no causales, y estables o inestables. Justifique las respuestas.

Simplemente tenemos que ir multiplicando e integrando:

A)
$$\left. \begin{aligned} f(t) &= e^{-4t}u(-t) \\ x(t) &= e^{-3t}u(t) \end{aligned} \right\}$$

limite sup. t .

$$f(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-4\tau}u(-\tau)}_{\text{limite inf } -\infty} e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t e^{-4\tau} e^{-3(t-\tau)} d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^t e^{-4\tau-3(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^t e^{-\tau-3t} d\tau = \int_{-\infty}^t e^{-\tau-3t} d\tau =$$

$$= \left[e^{-\tau-3t} \right]_{-\infty}^t = e^{-10t} - \left(-e^{-\infty} \right) = e^{-10t} = y(t)$$

B) $g(t) = \text{sen}(t)u(t)$ ⚡ Es una integral cíclica
 $x(t) = e^{-4t}u(t)$

$$g(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{\text{sen}(\tau)u(\tau)} e^{-4\tau} \cancel{u(t-\tau)} d\tau = \int_0^t \text{sen}(\tau) e^{-4\tau} d\tau$$

$$= \left\{ \begin{aligned} u &= e^{-4\tau} & du &= -4e^{-4\tau} d\tau \\ dv &= \text{sen}(\tau) d\tau & v &= -\cos(\tau) \end{aligned} \right\} =$$

$$= \left[-e^{-4\tau} \cos(\tau) \right]_0^t - 4 \int_0^t e^{-4\tau} \cos(\tau) d\tau =$$

integro por partes

$$= \begin{cases} u = e^{-4\tau} & du = -4e^{-4\tau} \\ dv = \cos(\tau) & v = \sin(\tau) \end{cases} =$$

ciclo ↓

$$= \left[-e^{-4\tau} \cos(\tau) \right]_0^t - 4 \left(\left[e^{-4\tau} \sin(\tau) \right]_0^t + 4 \int_0^t e^{-4\tau} \sin(\tau) d\tau \right) =$$

despejo $\int_0^t e^{-4\tau} \sin(\tau) d\tau$ y

$$\int_0^t e^{-4\tau} \sin(\tau) d\tau = \frac{\left[-e^{-4\tau} \cos(\tau) \right]_0^t - 4 \left[e^{-4\tau} \sin(\tau) \right]_0^t}{4};$$

$$\int_0^t e^{-4\tau} \sin(\tau) d\tau = \frac{-e^{-4t} \cos(t) + e^{-4t} - 4 \left(e^{-4t} \sin(t) \right)}{4} =$$

$$= -e^{-4t} \sin(t) + \frac{e^{-4t} - e^{-4t} \cos(t)}{4} = y(t)$$

c) $h(t) = 3\delta(t) + t u(t)$

$$x(t) = e^{-3t} u(t)$$

$$h(t) * u(t) = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} 3\delta(\tau) e^{-3(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau} + \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \tau u(\tau) e^{-3(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau}$$

$$\int_{-\infty}^t 3e^{-3(t-\tau)} d\tau = \left[e^{-3(t-\tau)} \right]_{-\infty}^t = 1 - e^{-\infty}$$

$$\int_0^t \tau e^{-3(t-\tau)} d\tau \Rightarrow \text{integral por partes} \begin{cases} u = \tau & du = d\tau \\ dv = e^{-3(t-\tau)} & v = \frac{e^{-3(t-\tau)}}{3} \end{cases}$$

$$\left[\tau \frac{e^{-3(t-\tau)}}{3} \right]_0^t - \frac{1}{3} \int_0^t e^{-3(t-\tau)} d\tau = \left[\tau \frac{e^{-3(t-\tau)}}{3} \right]_0^t - \frac{1}{9} \left[e^{-3(t-\tau)} \right]_0^t =$$

$$\frac{t}{3} - \frac{1}{9} (1 - e^{-3t})$$

$$y(t) = 1 + \frac{t}{3} - \frac{1}{9}(1 - e^{-3t}) = \frac{9+3t-1-e^{-3t}}{9} = \frac{8+3t-e^{-3t}}{9} = y(t)$$

D) $v(t) = e^{-t} u(t)$

$$x(t) = e^{-3t} u(t)$$

$$v(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) e^{-3(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\tau} \cdot e^{-3(t-\tau)} d\tau =$$

$$\int_0^t e^{2\tau-3t} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t 2 e^{2\tau-3t} d\tau = \frac{1}{2} \left[e^{2\tau-3t} \right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{2} (e^{-t} - e^{-3t}) = y(t)$$

Para determinar si son causales, las respuestas al impulso cumplen que $\forall t < 0, h(t) = 0$.

y estable, si $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$

A) El sistema no es causal, $\forall t < 0, f(t) \neq 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-4\tau} u(-\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\tau} d\tau = \frac{1}{4} [e^{-4\tau}]_{-\infty}^{\infty} =$$

$$\frac{1}{4} (e^{\infty} - e^{+\infty}) = -\frac{1}{4} e^{+\infty} = \underline{\underline{-\infty}} \quad \text{ES ESTABLE.}$$

B) El sistema si es causal, $\forall t < 0, g(t) = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)| d\tau = \int_0^{+\infty} \sin(\tau) u(t) d\tau = -[\cos(\tau)]_0^{\infty} = -\cancel{\cos(\infty)} - \cancel{\cos(0)},$$

$$\text{entonces } \sin(\tau) = \frac{e^{j\tau} - e^{-j\tau}}{2j} \Rightarrow \frac{1}{2j} \left[\int_0^{+\infty} e^{j\tau} d\tau - \int_0^{+\infty} e^{-j\tau} d\tau \right] =$$

$$= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{j} [e^{j\tau}]_0^{\infty} + \frac{1}{j} [e^{-j\tau}]_0^{\infty} \right) = -\frac{1}{2} (\infty - 1) - \frac{1}{2} (0 - 1) = -\infty$$

El sistema es ESTABLE.

C) El sistema es causal, $\forall t < 0, h(t) = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 3\delta(\tau) d\tau + \int_0^{+\infty} \tau d\tau = 3 + \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_0^{\infty} = \underline{\infty}$$

El sistema NO ES ESTABLE.

D) El sistema es causal, $\forall t < 0, v(t) = 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(\tau)| d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} d\tau = -\left[e^{-\tau} \right]_0^{+\infty} = -e^{-\infty} + 1 = 1.$$

$1 < \infty$, el sistema es ESTABLE.



Ejercicio 5.4 Calcule la respuesta al escalón de los sistemas LTI representados mediante las siguientes ecuaciones diferenciales:

- a) $y''(t) + 2y'(t) - 15y(t) = x(t)$
- b) $y''(t) + \frac{1}{2}y'(t) = x(t)$
- c) $y''(t) + 6y'(t) + 13y(t) = x(t)$

Aunque ponga ecuaciones diferenciales, no te asustes, es muy fácil.

la señal de entrada $x(t)$ es $x(t) = u(t)$.

Ahora, con las ecuaciones diferenciales:

- * Las y las reemplazo por s
- * Las "comillas" del orden de derivada por números
- * Cambio las t por p .
- * igualo las ecuaciones a cero resultando:

Ⓐ $r^2 + 2r - 15 = 0$

1º SACO RAÍCES
 $r = 3, -5$

2º SUSTITUYO $y_p(t) = D u(t)$
en la ec. diferencial

$y_p'(t) = D \delta(t)$

$y_p''(t) = D \delta'(t)$

y en la ec. diferencial:

$y_p''(t) + 2y_p'(t) - 15y_p(t) = x(t)$

3º LA SOLUCIÓN PARA $t > 0$:

$-15 D u(t) = x(t)$

⊗ con $x(t) = u(t)$, $D = -\frac{1}{15}$.

$y_p = -\frac{1}{15} u(t)$

4º COMPRIMO LA SOLUCIÓN
↓ ec característica

$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ ← ec particular

$y(t) = [A e^{3t} + B e^{-5t} - \frac{1}{15}] u(t)$

Ⓑ $r^2 + \frac{1}{2}r = 0$

1º $r = 0, -0.5$

2º Como $r = 0$, $y_p = D t u(t)$

$y_p'(t) = D t \delta(t) + D u(t)$

$y_p''(t) = D t \delta'(t) + 2 D \delta(t)$

$y_p''(t) + \frac{1}{2} y_p'(t) = x(t)$

3º con $t > 0$:

$\frac{1}{2} D u(t) = x(t)$

↙ con $x(t) = u(t)$

$D = 2$

$y_p = 2t u(t)$

4º la solución es:

$y(t) = (A + B^{-0.5t} + 2t) u(t)$

5º $y(0), y'(0) = 0$, ¿A y B?

$\begin{cases} A + B = 0 \\ -0.5B + 2 = 0 \end{cases}$

Ⓒ $r^2 + 6r + 13 = 0$

1º $r = -3 \pm 2i$

2º Con $y_p = D u(t)$,

$y_p''(t) + 6y_p'(t) + 13y_p(t) = x(t)$

3º con $t > 0$ $x(t) = u(t)$

$13 D u(t) = u(t)$

$D = \frac{1}{13}$

4º la solución es: zoom

$y(t) = [A e^{-3t} \cos(2t) + B e^{-3t} \sin(2t) + \frac{1}{13}] u(t)$

5º Saco A y B con $y(0), y'(0) = 0$

⊗ Derivo y simplifico

$\begin{cases} A + \frac{1}{13} = 0 \\ -3A + 2B = 0 \end{cases} \begin{cases} A = -\frac{1}{13} \\ B = -\frac{3}{26} \end{cases}$

Solución:

5: Con $y(0)=0$ y $y'(0)=0$,
saco A y B:

$$\begin{cases} A + B - \frac{1}{15} = 0 \\ 3A - 5B = 0 \end{cases} \begin{matrix} (y) \\ \text{derivo en} \\ t=0. \end{matrix}$$

$$A = \frac{1}{24} \quad B = \frac{1}{40}$$

Sol

$$y(t) = \left[\frac{1}{24} e^{3t} + \frac{1}{40} e^{-5t} - \frac{1}{15} \right] u(t)$$

$$A = -4 \quad B = 4$$

Solución

$$y(t) = [-4 + 4e^{-0.15t} + 2t] u(t)$$

$$y(t) = \left[\frac{1}{13} e^{-3t} \cos(2t) - \frac{3}{26} e^{-3t} \sin(2t) + \frac{1}{13} \right] u(t)$$

