

Ejercicios Tema 4 (Ejercicios 1 al 19)

① Un cuadrupolo eléctrico lineal es una agrupación de tres cargas puntuales alineadas, distribuidas de la siguiente forma:

- * una carga de valor $-2q$ colocada en el origen de coordenadas,
- * y dos cargas de valor q colocadas en los puntos $(0, 0, a)$ y $(0, 0, -a)$.

Calcule:

- El campo eléctrico que estas tres cargas crean en el punto de coordenadas (a, a, a) y la fuerza que ejercen dichas cargas sobre otra carga q colocada en ese punto.
- El potencial electrostático en ese mismo punto y la energía potencial electrostática que posee una carga q colocada en ese punto.

APARTADO A

El campo eléctrico generado por un sistema de n cargas viene dado por la siguiente expresión: $\vec{E} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$.

En nuestro caso:

$$\vec{E} = \frac{a}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-2q}{|\sqrt{3}a|^3} (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) + \frac{q}{|\sqrt{2}a|^3} (\hat{i}, \hat{j}, 0) + \frac{q}{|\sqrt{6}a|^3} (\hat{i}, \hat{j}, 2\hat{k}) \right] \overset{\substack{\text{saco factor} \\ \text{común el } a \text{ y } q}}{\downarrow} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[\frac{-2}{3\sqrt{3}} (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\hat{i}, \hat{j}) + \frac{1}{6\sqrt{6}} (\hat{i}, \hat{j}, 2\hat{k}) \right] =$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} (0,0367(\hat{i} + \hat{j}) - 0,2488 \hat{k})$$

Acuérdate del $\hat{k}$ al calcular $\hat{k}$.

La fuerza será tan fácil como multiplicar la carga por el campo: $\vec{F} = q\vec{E}$, entonces

$$\vec{F}_q = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} (0,0367(\hat{i} + \hat{j}) - 0,2488 \hat{k})$$

APARTADO B

El potencial electrostático como $V = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$, en nuestro caso,

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-2}{|\sqrt{3}a|} + \frac{1}{|\sqrt{2}a|} + \frac{1}{|6a|} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[\frac{-2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \right] = -0,0393 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

La energía potencial $E_p = qV$, entonces: $-0,0393 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = E_p$

② Sea un cubo de lado a , en el que se coloca en cada vértice una carga puntual q . Si hacemos coincidir el Origen de coordenadas con uno de los vértices, calcular:

* la fuerza ejercida por el resto de cargas sobre la colocada en el vértice (a, a, a) , así como la energía potencial de esa carga.

B) El valor del campo y el potencial en el punto (a, a, a) .

Nos piden: $\vec{E}$, $\vec{F}$, E_p y V en (a, a, a) . La resolución de este ejercicio es trivial:

→ Un cubo tiene 8 vértices, luego hay 8 cargas: $(0, 0, 0)$, $(0, 0, a)$, $(0, a, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, a, a)$, $(a, 0, a)$, $(a, a, 0)$, (a, a, a)

→ El sistema está compuesto por todas las cargas menos la que hay en (a, a, a) ,

Entonces:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[\frac{1}{3\sqrt{3}} (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} (2\hat{i}, 2\hat{j}, 2\hat{k}) + 1(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{a} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \right)$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times (2\hat{i}, 2\hat{j}, 2\hat{k}) = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2} \times 2(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right]$$

$$E_p = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right] = qV$$

③ Calcule la fuerza ejercida sobre una carga puntual $q = 5 \mu C = 5 \cdot 10^{-6} C$ colocada a una distancia de 30 cm de un hilo rectilíneo, cargado con una densidad lineal de carga uniforme $\rho_L = 3 \cdot 10^{-6} C/m$, si el hilo es:

* infinito

* finito, de longitud $L = 0.6$ metros y la carga está situada en la mediatriz.

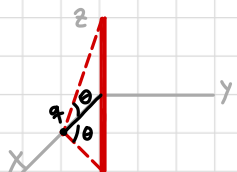
CASO INFINITO

Estamos ante un problema de geometría cilíndrica. Con la ley de Gauss sabemos que el campo eléctrico es

$$E = \frac{Q_s = \rho_L \cdot H}{2\pi r \epsilon_0}. \text{ Sabiendo que } F = qE, \text{ entonces:}$$

$$E = 179750.788 N/C \Rightarrow F = qE = 0.90 N$$

CASO FINITO $L = 0.6 m$



$$\text{Sabemos que } \vec{E}(\vec{r}) = \int_L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} (\vec{r} - \vec{r}_0).$$

$$\text{Si } \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \text{ y } \vec{r}_0 = z'\hat{k}, \text{ entonces } \vec{r} - \vec{r}_0 = x\hat{i} + y\hat{j} + (z - z')\hat{k}. \text{ y } dq' = \rho_L dl' \quad \text{en este caso } dz'$$

$$\text{Por tanto, } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + (z - z')\hat{k}}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}} dz' = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[(x\hat{i} + y\hat{j}) \int_L \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}} dz' - \hat{k} \int_L \frac{(z - z')}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}} dz' \right]$$

ya saco las cte

Según el libro (p135, 136), la integral resulta en ←

$$\frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 + u^2}} \Big|_L = \int_L \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}}$$

$$\text{Si } x^2 + y^2 = a^2 \text{ y } (z - z')^2 = u$$

$$\text{con } y, z = 0; L = 0.6; x = 0.3$$

$$\downarrow \frac{\rho_L x \hat{i}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-z'}{x^2 \sqrt{x^2 + z'^2}} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{-2\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{0.3 \sqrt{2 \times 0.3^2}} \hat{i} = (-127103 \hat{i}) N/C$$

Según el libro, la integral es cero (pág 135 y 136).

$$\text{Con todo lo nuevo, } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_L (x\hat{i} + y\hat{j})}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z - z'}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

$$\text{En escalar } E = 127103 N/C$$

$$\text{Y por tanto la fuerza será } F = qE = 0.635 \approx 0.64 N$$

④ Una línea infinita de densidad lineal de carga ρ_L se rodea con un cilindro infinitamente largo de radio a , cuyo eje coincide con ella. La superficie del cilindro posee una densidad superficial de carga constante ρ_s . Encuentre el valor del campo eléctrico en cualquier punto. ¿Qué valor de ρ_s anularía el campo para todos los puntos fuera del cilindro cargado? Calcular la diferencia de potencial entre el cilindro y la línea, si la línea tuviera un radio pequeño b .

Este ejercicio es también sencillo. Tenemos un hilo y un cilindro. El hilo está en el eje del cilindro. Tenemos que:

* Averiguar el valor de campo dentro y fuera del cilindro.

* Determinar el valor de ρ_s tal que $\rho_s = 0$, cuando calculamos el campo fuera del cilindro.

* El potencial.

CAMPO ELÉCTRICO

Caso 1. Partícula dentro del cilindro.

Aplicamos el T^a de Gauss, teniendo en cuenta solo el cilindro: $E(p) 2\pi r H = \frac{Q_s}{\epsilon_0}$, con $Q_s = \rho_L H$, entonces $E(p) = \frac{\rho_L}{2\pi r \epsilon_0} \hat{r}$

Caso 2. Fuera del cilindro:

Aplicamos el principio de superposición y el T^a de Gauss:

$E(p) 2\pi r H = \frac{Q_s}{\epsilon_0}$, con $Q_s = \rho_L H + \rho_s 2\pi a H$, entonces, $E(p) = \frac{\rho_L + \rho_s 2\pi a}{2\pi r \epsilon_0} \hat{r}$.

CONDICIÓN DE QUE FUERA DEL CILINDRO, $\vec{E} = 0$

La pregunta nos pide ρ_s tal que $\rho_s = 0$ cuando $p > a$, entonces prestamos atención a Q_s , lo igualo a cero y despejo ρ_s :

$$Q_s = \rho_L H + \rho_s 2\pi a H \Rightarrow \rho_L H + \rho_s 2\pi a H = 0 \Leftrightarrow \rho_s = -\frac{\rho_L}{2\pi a}$$

POTENCIAL

Como sabemos que fuera del cilindro el campo es 0, entonces no hay potencial. No obstante, dentro sí. Por ende, definimos ΔV si $p < a$ como $\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_b^a \frac{\rho_L}{2\pi \epsilon_0 r} dr \hat{r} = \frac{\rho_L}{2\pi \epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\rho_L}{2\pi \epsilon_0} (\ln|b| - \ln|a|) = \frac{\rho_L}{2\pi \epsilon_0} \ln\left|\frac{b}{a}\right| = \Delta V$

le doy la vuelta a los límites para que sea positivo

⑤ Dado un hilo circular cargado con una densidad lineal de carga de carga uniforme ρ_l y radio a , hallar el potencial y el campo electrostático creado por dicha distribución de carga en cualquier punto de su eje. Estudiar el caso en el que el radio a fuera muy pequeño comparado con la distancia al punto.

Nos piden:

* El potencial y el campo electrostático

* ¿Qué pasa cuando $z \gg a$?
 $\hookrightarrow$ mucho más grande.

PRIMER APARTADO

El campo eléctrico vendrá dado por la expresión $\vec{E}(z) = \frac{z a \rho_l}{2 \epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$, que conseguiremos mediante la definición de campo:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} (\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{cases} dq' = \rho_l d\ell' \\ \vec{r} - \vec{r}_0 = -x'\hat{i} - y'\hat{j} + z\hat{k} \\ |\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{a^2 + z^2} \end{cases} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{a d\ell'}{(a^2 + z^2)^{3/2}} (-x'\hat{i} - y'\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{-\rho_l a}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\ell' (x'\hat{i} + y'\hat{j} - z\hat{k}) =$$

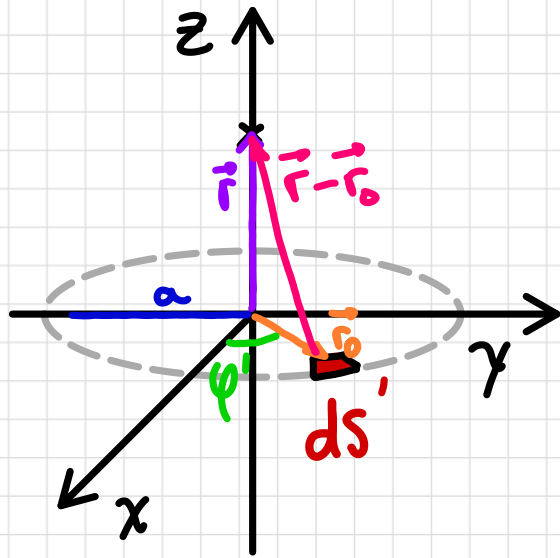
$$= \frac{\rho_l a}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \left[-\int_0^{2\pi} d\ell' x'\hat{i} - \int_0^{2\pi} d\ell' y'\hat{j} + \int_0^{2\pi} d\ell' z\hat{k} \right] = \frac{z \rho_l a}{2 \epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad \left(\begin{array}{c} * \text{ demostración} \\ \text{del libro} \end{array} \right)$$

$\int_0^{2\pi} a \cos \ell' d\ell' \quad \int_0^{2\pi} a \sin \ell' d\ell' \quad \int_0^{2\pi} z d\ell' = 2\pi z$

Si $z \gg a$ En ese caso, E solo dependerá de z . El aporte de a será insignificante.



- ⑥ Calcular el campo eléctrico producido en su punto de eje, por un disco plano de radio a , cargado con una densidad superficial de carga ρ_s . Deducir a partir del resultado cuál será el campo eléctrico producido por un plano indefinido cargado con la misma densidad superficial de carga.



Un trozo diferencial de disco ds' con posición $\vec{r}_0 = x'\hat{i} + y'\hat{j}$ y un punto del eje desde el que calculo el campo eléctrico $\vec{r} = z\hat{k}$, se tiene que: $\vec{r} - \vec{r}_0 = -x'\hat{i} - y'\hat{j} + (z)\hat{k}$ y su módulo:
 $|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}$.

La distancia del centro del disco variará, la llamaremos ρ' , y en función de las coordenadas del trozo será $\rho' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$. Entonces, $|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{\rho'^2 + z^2}$, y las coordenadas del trozo serán $x' = \rho' \cos \phi'$ e $y' = \rho' \sin \phi'$.

Si consideramos trozos infinitesimalmente pequeños, los podremos considerar rectángulos y su superficie

vendrá dada por la expresión $ds' = \rho' d\rho' d\phi'$.

Construyendo la expresión obtenemos $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} (-\rho' \cos \phi' \hat{i} - \rho' \sin \phi' \hat{j} + z \hat{k}) =$

$$= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^a \frac{-\rho'^2 d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' (\cos \phi' \hat{i} + \sin \phi' \hat{j}) + z \hat{k} \int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \right) = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{k}$$

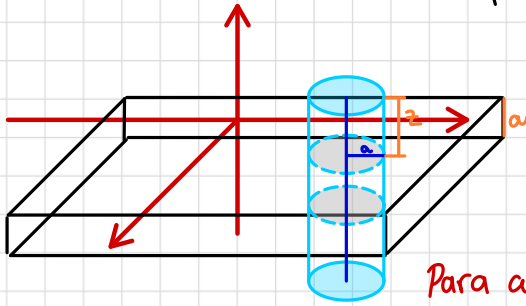
se anulan

(* demostración del libro ... & págs 139 - 140)

$$\int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} = \left| \begin{matrix} \rho'^2 + z^2 = u \\ \rho' d\rho' = \frac{du}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int_{z^2}^{a^2 + z^2} u^{-3/2} du = \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$$

[Firma]

- ⑦ Una carga de densidad volumétrica constante ρ_v tiene la forma de una plancha de grosor a . Las caras de la plancha son planos infinitos y paralelos al plano xy . Tómese como origen el punto medio entre las caras y encuentrese $\vec{E}$ para todos los puntos. Compárense los resultados para el caso de un plano infinito de densidad superficial ρ_s .



Estamos ante un ejercicio en el que tendremos que aplicar la ley de Gauss. Tenemos un caso de simetría plana. La ley la aplicamos porque este ejercicio cumple dos criterios: 1) No existen bordes ni picos (el plano es infinito) y 2) la densidad de carga es uniforme y por ende, simétrico.

Para aplicar la ley de Gauss necesitamos construir una superficie cerrada e imaginaria (el cilindro azul) que respete la simetría y pase por todos los puntos del campo. Asumimos un punto de referencia $\vec{r} = z\hat{k}$, y con eso:

1) Calculamos la carga neta $Q_s = \rho_v \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{altura}$ porque la superficie tiene grosor a .

2) Calculamos el flujo eléctrico en la superficie S $\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S}$ e igualamos las expresiones: $\Phi_E = \frac{Q_s}{\epsilon_0}$:

En este caso $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 2E(|z|)A$, entonces $E(|z|)2A = \frac{\rho_v \cdot \text{Área} \cdot \text{altura}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E(|z|) = \text{sgn}(z) \frac{\rho_v \cdot a}{2\epsilon_0}$.

¿Pero si el punto de referencia estuviese en el interior de la superficie?

En ese caso mediremos el campo que hay en ambas caras infinitas, por tanto:

Con $z \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$, $\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = 2E(|z|)A$ y $Q_s = \rho_v \cdot \text{Área} \cdot \text{altura}$ ②

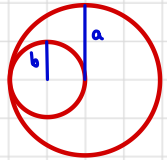
El sistema de referencia

Relacionamos las expresiones y entonces: $E(|z|) = \frac{\rho_v \cdot a}{\epsilon_0}$

son dos planchas actuando, en el exterior solo actúa una.

⚠ Observa que nosotros estamos evaluando el campo eléctrico que hay en la superficie, no en el espacio.

- ⑧ Una esfera de radio a tiene densidad de carga ρ_v , distribuida uniformemente en todo su volumen, excepto en una cavidad esférica de radio b ($b < a$) que permanece descargada. Calcular el campo eléctrico dentro de la cavidad esférica en los puntos del eje que pasa por los centros de las dos regiones, supuesto que los centros de las dos esferas están a una distancia d , de forma que toda la esfera de radio b está dentro de la esfera de radio a . ¿Cómo es $\vec{E}$ en cualquier punto de la cavidad?



Este ejercicio no podremos resolverlo directamente por Gauss, pero si aplicamos la Ley de Gauss a la primera bola (sin considerar el hueco) y a la segunda con densidad volúmica $-\rho_v$, y las restamos, obtendremos $\vec{E}$:

1º Gauss para esfera radio a :

Sabiendo que $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \underbrace{4\pi a^2}_{\text{Área esfera}} E(a)$. Y $Q_s = \rho_v \underbrace{\frac{4}{3}\pi a^3}_{\text{volumen esfera}} \Leftrightarrow E(r) = \frac{\rho_v \frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2 \epsilon_0} = \frac{\rho_v a}{3\epsilon_0} = E(a)$

2º Gauss para la esfera de radio b .

Si el centro de la esfera a es nuestro sistema de referencia, el centro de la esfera b está en d , el radio b es $b = a - d$. Por ende:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E(a-d) 4\pi (a-d)^2 = -\frac{\rho_v \frac{4}{3}\pi (a-d)^3}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E(a-d) = -\frac{\rho_v (a-d)}{3\epsilon_0}$$

3º Hacemos la diferencia

$$|\vec{E}(d)| = \frac{\rho_v a}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_v (a-d)}{3\epsilon_0} = \frac{\rho_v}{3\epsilon_0} (a - a + d) = \frac{\rho_v}{3\epsilon_0} d$$

✓ En ESCALAR.

* Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{d}$, entonces:

$$\vec{E}(\vec{d}) = \frac{\rho_v}{3\epsilon_0} \vec{d} \quad \text{✓ En VECTORIAL}$$

El campo es uniforme dentro de la cavidad por que hemos podido aplicar la Ley de Gauss.



② Dos esferas concéntricas tienen radios a y b , tales que $b > a$. La región entre ellas ($a \leq r \leq b$) se rellena con carga de densidad constante ρ_v . La densidad de carga es igual a cero en cualquier otro punto. Encontrar el campo eléctrico $\vec{E}$ para todos los puntos del espacio. ¿Se reducen los resultados a los valores de la esfera homogénea cuando $b \gg a$?

Este ejercicio es fácilito. Lo vamos a resolver con Gauss directamente. Observamos que solo hay campo eléctrico entre ambas esferas (enunciado):

El hueco en el que hay carga lo conseguiremos restando a la esfera mayor, la menor. A diferencia del ejercicio anterior, al estar las esferas alineadas, Gauss es más fácil:

CASO $a < r \leq b$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) \text{ y } Q_S = \rho_v \text{ Volumen, donde Volumen} = \frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3) \Leftrightarrow |\vec{E}(\vec{r})| = \frac{\rho_v}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{a^3}{r^2}\right).$$

⚡ Algunos recursos en Wualah no especifican este paso y es muy probable que inviertas el rato tratando de simplificar $(r-a)^3/r^2$ como $(r - \frac{a^3}{r^2})$, que no es posible.

CASO $r \leq a$

El campo eléctrico valdrá cero.

CASO $r > b$ ⚡ Mi ser quiere poner 0 por cómo está redactado el enunciado.

Tendremos que evaluar la actuación del volumen con carga entre ambas esferas. Fuera no hay campo.

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) \text{ y } Q_S = \rho_v \cdot \frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3) \Leftrightarrow |\vec{E}(\vec{r})| = \frac{\rho_v(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2}$$

¿Qué pasa si $b \gg a$?

La contribución de a será inexistente y por tanto, $|\vec{E}(\vec{r})| \approx \frac{\rho_v b^3}{3\epsilon_0 r^2}$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi a^3$$

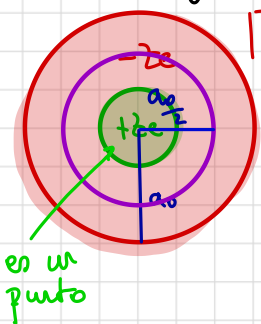
↑ esfera variable ↑ esfera a sin carga

saco factor común $\frac{4}{3}\pi$

(⚡ Si trabajas en escalar, indica siempre los módulos.)

10) Un átomo no polar puede considerarse constituido por una nube electrónica esférica e indeformable, de densidad de carga uniforme, radio a_0 y carga total $-Ze$ que rodea a un núcleo puntual de carga $+Ze$ (Z es el número atómico y e la carga del electrón). Calcula:

- A) El campo eléctrico creado por dicho átomo en los siguientes puntos:
 } A) Interior del átomo a una distancia del núcleo $\frac{a_0}{2}$.
 } B) Exterior del átomo a una distancia del núcleo $\frac{a_0}{2}$.
 B) la energía necesaria para traer un protón desde el infinito hasta la superficie del átomo.



A1 En este ejercicio aplicaremos nuevamente la ley de Gauss. Presenciamos una geometría esférica.

$$\left| \oint_S \vec{E} d\vec{S} \right| = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_S}{\epsilon_0}.$$

entre r es la de la incógnita de $E(r)$.

$$\text{El valor de } Q_S = Ze + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_v \Leftrightarrow Ze + \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{3Ze(-1)}{4\pi a_0^3} = Ze\left(1 - \frac{r^3}{a_0^3}\right)$$

lo ejerce el núcleo (es un punto)

lo que aporta la nube esférica.

$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_v = -Ze$ (es la carga de la nube), entonces

$$\rho_v = -\frac{3Ze}{4\pi a_0^3}$$

es la densidad de carga volumétrica de la esfera

Entonces, sabiendo que $\left| \oint_S \vec{E} d\vec{S} \right| = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Ze\left(1 - \frac{r^3}{a_0^3}\right)}{\epsilon_0} \Leftrightarrow$

$$E(r) = \frac{Ze\left(1 - \frac{r^3}{a_0^3}\right)}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \text{con } r = \frac{a_0}{2} \Rightarrow E\left(\frac{a_0}{2}\right) = \frac{7}{8} \frac{Ze}{4\pi \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \epsilon_0}$$

El resultado es el módulo de $\vec{E}(r)$

A2 Como tenemos dos esferas de misma carga pero con sentido opuesto, el campo eléctrico cuando estamos fuera del átomo es cero. $E(2a_0) = 0$

B El trabajo se define como $W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r}$ (y $\vec{F} = q\vec{E}$, pero $\vec{E} = \vec{0}$, entonces...), $W_{a_0 \rightarrow \text{sup}} = \int_{a_0}^{\text{sup}} \vec{0} d\vec{r} = \underline{\underline{0 J}}$

11) En una región del espacio el potencial electrostático en el SI (sistema internacional) viene dado por la expresión:

$$V = 3x + (y^2/x) - 3yz + 35.$$

A) LA FUERZA QUE ACTÚA SOBRE UNA CARGA PUNTUAL DE $200 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ LOCALIZADA EN $(1, 2, 1) \text{ m}$.

B) EL TRABAJO REALIZADO CUANDO DESPLAZAMOS DICHA CARGA DESDE EL PUNTO A AL B $(-1, 3, 2) \text{ m}$.

A) Para calcular la fuerza haremos uso de la expresión $\vec{F} = q\vec{E}$, donde $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$.

$$\vec{\nabla}V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \left(3 - y^2 \frac{1}{x^2}, \frac{2y}{x} - 3z, -3y \right) \Rightarrow \text{en } A(1, 2, 1) \Rightarrow \vec{E} = -(-1, 1, -6) = (1, -1, 6) = \hat{i} - \hat{j} + 6\hat{k}.$$

Entonces $\vec{F} = q\vec{E} = 200 \cdot 10^{-6} (\hat{i} - \hat{j} + 6\hat{k})$ *No simplifico más porque es más elegante.*

Por otro lado, el trabajo lo puedo calcular como $W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_p = -q(V_B - V_A) = -q(5 - 36) = 31q = 6,2 \cdot 10^{-5} \text{ J}$

↑
sustituyo los
valores de A y B
y calculo

12) Una esfera conductora de $0,9 \text{ m}$ de radio se carga a un potencial de 1 kV . Calcular:

A) la cantidad de carga que ha adquirido.

B) A continuación se conecta con otra esfera descargada de $0,45 \text{ m}$ de radio, ¿cuál será el potencial de esta esfera y cuánta carga ha adquirido?

APARTADO A

Para calcular la cantidad de carga, vamos a hacer uso de la expresión de potencial:

$$1 \text{ kV} = 1000 \text{ V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \Leftrightarrow Q = 1000 \cdot 4\pi\epsilon_0 r = 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 0,1 \mu\text{C}.$$

APARTADO B

Este apartado es sencillo. Se tiene que cumplir que $V_1 = V_2 \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r_2} \Leftrightarrow Q_1 \cdot \frac{r_2}{r_1} = Q_2 \Leftrightarrow Q_1 = 2Q_2$

Ahora bien, $Q_T = 0,1 \mu\text{C} = 2Q_2 + Q_2 \Leftrightarrow Q_2 = \frac{1}{3} Q_T = 3,33 \cdot 10^{-2} \mu\text{C}$

$$\frac{0,45}{0,90} = \frac{1}{2}$$



bola grande
bola chica

Finalmente, $V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\frac{5}{6}Q_T}{0.145} = 665,74 \approx \frac{2}{3} \text{ kV}$

⑬ Se tiene una esfera metálica de 0.2 m de radio que se ha cargado con 10 kV. Con otra esfera metálica de 0.04 m de radio, inicialmente descargada, se toca la grande y después de separarlas, se descarga la pequeña. ¿Cuál es el voltaje final de la esfera grande?

Este ejercicio consiste en repetir 7 veces el procedimiento del anterior:

Calculamos la carga de la bola grande: $V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r} \Leftrightarrow 4\pi\epsilon_0 V_1 r = Q_1 = 0,2253$

$Q_T = Q_1 + Q_2 = 5Q_2 + Q_2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{Q_T}{6} = Q_2} = \frac{1}{6} \mu\text{C} = Q_2$

⊗ Observamos que cada vez que la bola descargada toque la grande pierde $\frac{1}{6}$ de la carga.

El voltaje después de un toque resulta como $V_1' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\frac{5}{6}Q_T}{0.20} = 8333,3333 \text{ V}$

(repetimos el ejercicio con V_1' como V_0 !)

lo, como me aburría, decidí hacerlo con MATLAB:

```
voltaje_inicial = 10000; % V o 10kV

radio_bola_grande = 0.2; % metros
radio_bola_pequena = 0.04; % metros

numero_de_repeticiones = 7;
ciclo = 1;

while ciclo <= numero_de_repeticiones
    carga_total = 4 * pi() * 8.8542e-12 * voltaje_inicial * radio_bola_grande
    carga_2 = carga_total / 6;
    voltaje_inicial = 1/(4 * pi() * 8.8542e-12) * ((5*carga_total)/6)/radio_bola_grande

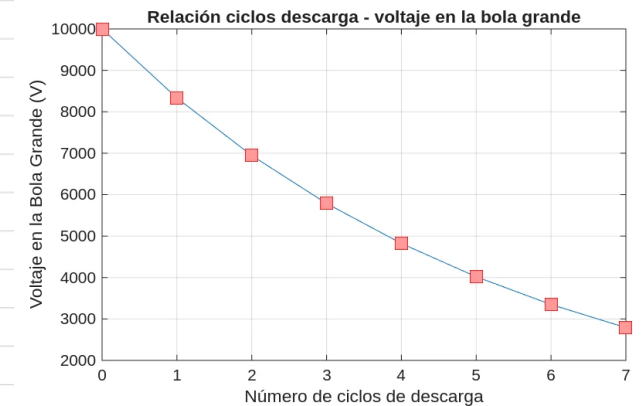
    ciclo = ciclo + 1;
end
```

El resultado final es 2,79 kV.

⊗ @miguel_pave en WUOLAH lo resuelve de una forma muy interesante. Hace uso de una serie exponencial. ¡Te animo a ver el recurso! (pág 11)

¿Qué relación hay entre la carga de la bola grande y la chica?

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r_1} \\ V_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{r_2} \end{aligned} \right\} V_1 = V_2 \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r_2} \Leftrightarrow Q_1 = \frac{r_1}{r_2} Q_2 = \boxed{5Q_2 = Q_1}$$



⊗ Puedes hacer click sobre la caja amarilla!



[Firma manuscrita]

⑭ Un condensador plano de $2\mu\text{F}$ de capacidad se conecta a una diferencia de potencial de 100V .

a) ¿Cuál es el valor de la carga adquirida?

b) Si la distancia entre las placas se redujese a la mitad, ¿aumentaría o disminuiría la capacidad? ¿Y la carga?

Razona las respuestas:

APARTADO A Usamos la fórmula que tenemos para condensadores $C = \frac{Q}{\Delta V}$. En nuestro caso, $\Delta V = 100\text{V}$, $C = 2 \cdot 10^{-6}\text{F}$, entonces $Q = 0.2\text{mC}$.

APARTADO B Usamos la siguiente expresión: $\frac{\text{Capacidad}}{\text{Área sup. cond.}} = \frac{\epsilon_0}{H}$, donde H denota la distancia entre los planos del condensador.

El condensador 1 tiene la distancia original $C_1 = \frac{A\epsilon_0}{H}$, el segundo a la mitad $C_2 = \frac{A\epsilon_0}{\frac{1}{2}H} = \frac{2A\epsilon_0}{H}$. Veamos la relación $\frac{C_1}{C_2} = \frac{\frac{A\epsilon_0}{H}}{\frac{2A\epsilon_0}{H}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow [2C_1 = C_2]$, luego la capacidad del segundo condensador se duplica.

En cuanto a la carga, sabemos que $2C_1 = C_2$, con $C = \frac{Q}{\Delta V}$, entonces $2\frac{Q_1}{\Delta V} = \frac{Q_2}{\Delta V} \Leftrightarrow [2Q_1 = Q_2]$, la carga se duplica.

↓
sigue siendo 100V

⑮ Se desea construir de placas plano-paralelas, usando vidrio como dieléctrico. El vidrio tiene una constante dieléctrica $\epsilon_r = 8$ y el campo eléctrico máximo que es capaz de soportar es de 20MV/m . El condensador debe tener una capacidad de $0.20\mu\text{F}$ y debe soportar una diferencia de potencial máxima de 10kV . ¿Cuál es el área mínima que pueden tener las placas del condensador para cumplir las especificaciones anteriores.

Es un condensador plano, la resolución es trivial. En rojo he señalado los datos que conocemos. Usamos la Ley de Gauss para conseguir la densidad de carga en las superficies. Sabemos que $Q_s = \rho_s \cdot A$, y la ley de Gauss aplicada a planos:

$|\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s}| = 2A|\vec{E}| = \frac{Q_s}{\epsilon_0} = \frac{\rho_s A}{\epsilon_0}$. (*) pero como son dos superficies cargadas en el condensador, $Q_s = 2\rho_s A$, entonces, reescrito:

$|\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s}| = 2A|\vec{E}| = \frac{Q_s}{\epsilon} \Leftrightarrow 2A|\vec{E}| = 2A\rho_s \Leftrightarrow \rho_s = |\vec{E}| \epsilon$. ojo que he reemplazado ϵ_0 por ϵ por que el dieléctrico es el vidrio y no el vacío, por tanto la permitividad eléctrica cambia.

Conocida la densidad de carga de superficie, la $\frac{C}{A}$ es $\frac{C}{A} = \frac{Q_s}{\Delta V}$. Observamos que de esta expresión podremos averiguar el área que buscamos: $A = \frac{C \Delta V}{Q_s} = \frac{C \Delta V}{|\vec{E}| \epsilon} = \frac{C \Delta V}{|\vec{E}| 8 \epsilon_0} = 1,41 \text{ m}^2$.

$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \Rightarrow 8 \epsilon_0 = \epsilon$

$\epsilon_r = 8$ como no estamos en el vacío,

- 16) Un condensador de placas plano-paralelas cuadradas, de lado $0,14 \text{ m}$ y separadas $0,002 \text{ m}$, se conecta a una batería de 12 V . Posteriormente se desconecta la batería y se aumenta la separación entre placas a $0,0035 \text{ m}$. ¿Cuáles son los valores de la carga antes y después?

¡CUIDADO CON EL EJERCICIO!

Resolver este ejercicio es trivial. Simplemente hacemos uso de la expresión: $\frac{C}{A} = \frac{\epsilon_0}{H} \Leftrightarrow C = \frac{A \epsilon_0}{H} = \frac{Q}{\Delta V} \Leftrightarrow Q = \frac{\Delta V A \epsilon_0}{H} = 1,04 \cdot 10^{-9} \text{ C}$

Ahora bien, al aumentar la separación la capacidad del condensador varía, pero después de haber cargado el condensador con $2,5 \text{ mm}$ y no descargarla, la cantidad de carga es... ¡LA MISMA!

- 17) Considere un condensador formado por dos chapas esféricas conductoras concéntricas de radios $a = 0,02 \text{ m}$ y $b = 0,04 \text{ m}$. Entre ellas hay un material dieléctrico de constante dieléctrica $\epsilon_r = 3$. Si establecemos una diferencia de potencial $V_0 = 10 \text{ V}$ conectando una pila entre ambas esferas, calcular:
- la expresión del campo eléctrico en las regiones $r < a$, $a \leq r \leq b$ y $r \geq b$.
 - la capacidad del condensador.
 - El valor de la carga que adquiere el condensador.
 - ¿Qué le ocurre a la capacidad si los radios se reducen a la mitad?

APARTADO A

Estamos ante un problema de simetría esférica, por tanto, aplicaremos la Ley de Gauss:

→ CASO $r \leq a \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$ por que se produce apantallamiento.

→ CASO $a < r \leq b \Rightarrow \oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_S}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \vec{E}(r) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_S}{r^2} \hat{r} \right]$ → Es la expresión genérica.
Yo busco conseguir $\vec{E}$ para mi caso, entonces impongo las condiciones buscando Q_S :

Para conseguir Q_S , $\Delta V = -\int_a^b \vec{E} d\vec{r} = \frac{Q_S}{4\pi\epsilon} \left(\frac{b-a}{ba} \right)$. Despejo Q_S y entonces:

$Q_S = 4\pi\epsilon \frac{ba}{b-a}$, sustituimos y obtenemos la expresión de campo deseada es:

$$\vec{E}(r) = \frac{V_0}{r^2} \frac{ba}{b-a} \hat{r}$$

→ CASO $r > b \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$, no hay campo fuera del condensador.

$$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 = 3\epsilon_0$$

APARTADO B

La capacidad del condensador viene dada por la expresión $C = \frac{Q}{\Delta V}$, donde ΔV lo hemos calculado antes: $C = \frac{4\pi\epsilon ab}{b-a} = 13,35 \text{ pF}$.

APARTADO C con $\Delta V = 10 \text{ V}$

Conocido C y ΔV , despejo $Q \Rightarrow C \cdot \Delta V = Q = 133 \cdot 10^{-12} \text{ C}$.

APARTADO D

Tan fácil como ver la proporción $\frac{C_1}{C_2}$, siendo C_1 el condensador original y C_2 el de tamaño reducido.

$$C_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{4\pi\epsilon_0 \frac{1}{2}a \frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a} = \frac{\pi\epsilon_0 ab}{\frac{1}{2}(b-a)} = \frac{2\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$$

Entonces: $\frac{C_1}{C_2} = \frac{\frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}}{\frac{2\pi\epsilon_0 ab}{b-a}} = \frac{4}{2} = 2 \Leftrightarrow C_1 = 2C_2$, es decir, se reduce a la mitad.

⑧ Un condensador variable de aire que tiene una capacidad mínima de $20 \mu\text{F}$ y máxima de $500 \mu\text{F}$ se conecta a un generador cuya tensión es de 500 V . Cuando el mando del condensador indica el valor máximo:

A) ¿Qué carga ha adquirido?

B) A continuación desconectamos las armaduras de los bornes del generador y movemos el mando hasta que indica el valor mínimo.

¿Cuál es ahora la carga? *¡Atento!*

c) ¿Cuál es su diferencia de potencial?

APARTADO A

De la expresión $C = \frac{Q}{\Delta V}$ despejo $Q = C \cdot \Delta V = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ ($0,25 \mu\text{C}$).

APARTADO B

La misma (explicación en el ejercicio 16).

APARTADO C

De la expresión $C = \frac{Q}{\Delta V}$, despejo $\Delta V = \frac{Q}{C} = 12500 \text{ V} = 12,5 \text{ kV}$.

$$20 \text{ pF} = 20 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

19) Muchos aparatos de radio utilizan un condensador plano variable de placas semicirculares como parte de un circuito resonante que permite la sintonización de las diferentes emisoras. Suponiendo que las placas tienen un radio $a = 0,01 \text{ m}$, y están separadas una distancia $d = 0,001 \text{ m}$, calcular la capacidad de dicho condensador, cuando entre ambas placas existe aire. Para variar la capacidad de dicho condensador se introduce entre sus placas un dieléctrico semicircular del mismo radio a y espesor d que se gira cuando se mueve el dial del aparato de radio para sintonizar una emisora.

Calcular la capacidad del condensador cuando:

φ) El espacio entre placas está lleno de aire.

a) Todo el espacio está ocupado por el dieléctrico.

b) El dieléctrico solo ocupa un ángulo $\alpha = 30^\circ$. ¿A qué asociación de condensadores equivale esta nueva situación?

Datos: $\epsilon_{\text{aire}} \approx \epsilon_0$ $\epsilon_r (\text{dieléctrico}) = 3$.

APARTADO φ

$$A = \frac{\text{Área Círculo}}{2} = \frac{\pi r^2}{2} = 1,571 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Usaremos la expresión $C = \frac{A \epsilon_0}{H} = 1,39 \cdot 10^{-12} \text{ F}$.

APARTADO A



Handwritten signature

Usamos la misma expresión que antes, solo que ϵ_0 lo cambio por $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 = 3\epsilon_0$.

$$C = \frac{A 3\epsilon_0}{H} = 4,17 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

APARTADO B

La asociación indicada representa dos condensadores en paralelo: El Área = $A_1 + A_2$ y $C_T = C_1 + C_2$.

→ Cálculo Área y Capacidad Condensador Dieléctrico (30°)

El área que ocupa el dieléctrico es $A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\pi r^2}{12}$

y la capacidad $C_1 = \frac{A\epsilon}{H} = \frac{\frac{\pi r^2}{12} \cdot 3\epsilon_0}{H} = \frac{\frac{\pi r^2}{4} \epsilon_0}{H} = \frac{\pi r^2 \epsilon_0}{4H} = 6,954 \cdot 10^{-13} \text{ F}$

→ Caso Condensador Aire (150° grados)

El área es $\hat{A} = \pi r^2 \cdot \frac{150}{360} = \pi r^2 \cdot \frac{5}{12}$

y la capacidad $C_2 = \frac{A\epsilon_0}{H} = \frac{5\pi r^2 \epsilon_0}{12H} = 1,159 \cdot 10^{-12} \text{ F}$

→ Suma total

$$C_T = C_1 + C_2 = 1,85 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

¿Algun comentario o sugerencia
para mejorar este recurso?



SCAN ME