

Ejercicios Tema 3 - Sistemas lineales en el dominio transformado

Ejercicio 3.1 Calcule la transformada inversa de Laplace para las siguientes funciones

a) $X(s) = 1 - \frac{s}{s^2-1}$ con RdC $\text{Re}(s) < 1$

b) $Y(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ con RdC $\text{Re}(s) > 0$

c) $Z(s) = \frac{3s^2-7s+5}{s^3-5s^2+8s-4}$

La resolución de este ejercicio recae en saber obtener los polos (raíces del denominador) y ceros (raíces del numerador) de una señal $X(s)$ expresada como cociente de polinomios:

A) $X(s) = 1 - \frac{s}{s^2-1}$

Sacamos los polos y ceros: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Polos: } s^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow s = \pm 1 \\ \text{Ceros: } s = 0. \end{array} \right.$

Aplicamos la inversión de la transformada de Laplace:

$$X(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds = \delta(t) - \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{s}{(s+1)(s-1)} e^{st} ds \Leftrightarrow$$

⊗ Consultar tabla transformada de Laplace

$$\left\{ \begin{array}{l} S = A(s-1) + B(s+1) \\ A+B=1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A, B = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Para resolverlo lo descompongo en fracciones parciales

$$X(t) = \delta(t) - \frac{1}{2} [e^{-t} + e^t] u(-t) \leftarrow \text{pongo } -t \text{ por que ROC } \text{Re}(s) < \text{Re}(1).$$

B) $Y(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$

Sacamos los polos y ceros = $\left\{ \begin{array}{l} \text{Polos: } s = \frac{-1 \pm \sqrt{3}j}{2} \\ \text{Ceros: no hay.} \end{array} \right.$

Las soluciones complejas de los polos los podemos descomponer en una parte real y una imaginaria, tal que, $\text{Re}(z) = a$ e $\text{Im}(z) = jw$.

⊗ $\text{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ ⊗ $\text{Im}(z) = jw = \frac{\sqrt{3}}{2}$

La función de transferencia se reescribe como $Y(s) = \frac{1}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$

$$\frac{1}{(s+a)^2 + w^2}$$

Aplicamos la inversión de Laplace

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds = e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) u(t).$$

$$c) Z(s) = \frac{3s^2 - 7s + 5}{s^3 - 5s^2 + 8s - 4}$$

Sacamos los polos y ceros

Polos: $s = 1, 2, 2$

Ceros: $\frac{7 \pm \sqrt{11}j}{6} = s$

⚡ A veces la calculadora no da todas las soluciones.

Descomponemos el polinomio en fracciones simples:

$$3s^2 - 7s + 5 = A(s-2)^2 + B(s-1)(s-2) + C(s-1): * \text{ con } s=2, C=3$$

$$* \text{ con } s=1, A=1$$

$$* \text{ con } s=0, B=2.$$

Luego podemos reescribir la función como:

$$Z(s) = \frac{1}{(s-1)} + 2 \frac{1}{(s-2)} + 3 \frac{1}{(s-2)^2}$$

Aplicando la inversión:

$$z(t) = e^t u(t) + 2e^{2t} u(t) + 3te^{2t} u(t).$$

Ejercicio 3.2 Dado el sistema de la Figura 1:

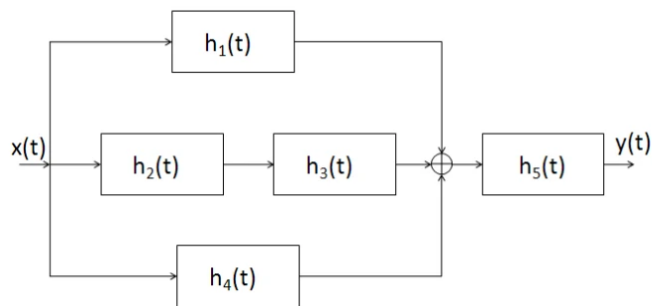


Figura 1. Sistema para el ejercicio 3.2.

donde

$$h_1(t) = e^{-2t}u(t), \quad h_2(t) = e^{-2t}u(t), \quad h_3(t) = e^{-t}u(t), \quad h_4(t) = \delta(t), \quad h_5(t) = e^{-3t}u(t)$$

- Determine si es estable.
- Calcule su función de transferencia y su respuesta al impulso.

Dado $h_1 \dots h_5$, necesitamos aplicar la transformada de Laplace a la función de transferencia para poder calcular la función equivalente que engloba a todos los bloques.

Hacemos la transformada de Laplace porque simplifica el proceso de cálculo. En el dominio transformado, los bloques simplemente se multiplican si están en serie o suman si están en paralelo.

Es cierto que, si Uds. es buen amante de las artes del masoquismo, puede optar a trabajar con las funciones de transferencia en el dominio temporal mediante el uso de la convolución, se sorprenderá lo mucho que su esfínter se pueda dilatar.

Aplicamos la transformada a nuestras funciones:

$$h_1(t) = e^{-2t}u(t), \quad h_2(t) = e^{-2t}u(t), \quad h_3(t) = e^{-t}u(t), \quad h_4(t) = \delta(t), \quad h_5(t) = e^{-3t}u(t)$$

$$h_1(s) = \frac{1}{s+2}; \quad h_2(s) = \frac{1}{s+2}; \quad h_3(s) = \frac{1}{s+1}; \quad h_4(s) = 1; \quad h_5(s) = \frac{1}{s+3}.$$

y ahora, calculamos la función equivalente $h(s)$:

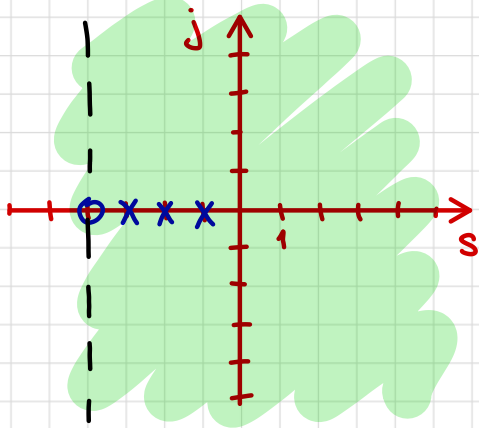
$$H(s) = \frac{1}{s+3} \left[\frac{1}{s+2} + \left(\frac{1}{(s+2)(s+1)} \right) + 1 \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(s+1) + 1 + (s+1)(s+2)}{(s+3)(s+2)(s+1)} = H(s) = \frac{s^2 + 4s + 4}{(s+3)(s+2)(s+1)} =$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{(s+4)}{(s+3)(s+2)(s+1)} \quad \rightarrow \text{POLOS: } s = -1, -2, -3$$

$$\text{CEROS: } s = -4$$

A) ¿ES ESTABLE?



Represento en un plano complejo los polos (x) y los ceros (o), y en el cero más a la derecha trazo una asíntota.

Un sistema es estable y causal si la ROC incluye todos los polos (causal) y el eje $j\omega$ (estable).

El plano de convergencia es a la derecha de la asíntota. Es a la derecha porque $u(t)$ tiene a t positivo.

En conclusión, el sistema es **ESTABLE**.

B) CALCULE SU FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

La hemos calculado previamente: $H(s) = \frac{(s+4)}{(s+3)(s+2)(s+1)}$.

Y SU RESPUESTA AL IMPULSO:

Simplemente tenemos que hacer la inversa de la transformación de Laplace:

⊗ Descomponemos $H(s)$ en fracciones parciales:

$$H(s) = \frac{(s+4)}{(s+3)(s+2)(s+1)} \Rightarrow s+4 = A(s+2)(s+1) + B(s+3)(s+1) + C(s+3)(s+2).$$

$$\otimes \text{ con } s = -2, B = -2$$

$$\otimes \text{ con } s = -1, C = \frac{3}{2}$$

$$\otimes \text{ con } s = -3, A = \frac{1}{2}$$



$$H(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s+3} - 2 \frac{1}{s+2} + \frac{3}{2} \frac{1}{s+1} \Rightarrow \text{inversión}$$

$$h(t) = \frac{1}{2} e^{-3t} u(t) - 2 e^{-2t} u(t) + \frac{3}{2} e^{-t} u(t).$$



Ejercicio 3.3 Dados las siguientes respuestas impulsivas

- $f(t) = e^{4t}u(-t)$
- $g(t) = \sin(t)u(t)$
- $h(t) = 3\delta(t) + tu(t)$
- $v(t) = e^{-t}u(t)$

- Obtenga la función de transferencia para los sistemas dados.
- Trabajando en el dominio transformado, obtenga la salida de los sistemas para la entrada $x(t) = e^{-3t}u(t)$
- Determine si los sistemas anteriores son causales o no causales, y estables o inestables. Justifique las respuestas.
- Obtenga la respuesta en frecuencia para los sistemas anteriores.

A) CALCULEMOS LAS FUNCIONES DE TRANSFERENCIA.

Aplicamos transformada de Laplace:

$$f(t) = e^{4t}u(-t) \Rightarrow f(s) = -\frac{1}{s-4} \text{ con ROC } \operatorname{Re}(s) < 4$$

$$g(t) = \sin(t)u(t) \Rightarrow g(s) = \frac{1}{s^2+1} \text{ con ROC } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

$$h(t) = 3\delta(t) + tu(t) \Rightarrow h(s) = 3 + \frac{1}{s^2} \text{ con ROC } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

$$v(t) = e^{-t}u(t) \Rightarrow v(s) = \frac{1}{s+1} \text{ con ROC } \operatorname{Re}(s) > -1$$

B)

$x(s) \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow y(s)$

$x(t) = e^{-3t}u(t) \xrightarrow{\text{LAPLACE}} x(s) = \frac{1}{s+3} \text{ con ROC } \operatorname{Re}(s) > -3.$

Y ahora: $Y(s) = H(s)X(s)$,
en decir, con cada sistema:

$$1) F(s)X(s) = -\frac{1}{(s-4)(s+3)} \text{ con ROC } -3 < \operatorname{Re}(s) < 4.$$

$$2) G(s)X(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+3)} \text{ con ROC } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

$$3) H(s)X(s) = \left[3 + \frac{1}{s^2}\right] \frac{1}{s+3} \text{ con ROC } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

$$4) V(s)X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \text{ con ROC } \operatorname{Re}(s) > -1.$$

c) Determinar si los sistemas son estables / causales.

Recordemos que los sistemas causales son aquellos cuya región de convergencia en el semiplano a la derecha del polo real más grande.

Y los entablen aquellos cuyo semiplano incluyen el eje $j\omega$.

Entonces:

1) $F(s)X(s) \rightarrow$ NO CAUSAL, ESTABLE

2) $G(s)X(s) \rightarrow$ CAUSAL, NO ESTABLE

3) $H(s)X(s) \rightarrow$ CAUSAL, NO ESTABLE

4) $V(s)X(s) \rightarrow$ CAUSAL, ESTABLE.

D) LA RESPUESTA EN FRECUENCIA

Se renueve con sustituir las s de los sistemas por $j\omega$.



Ejercicio 3.4 Trabajando en el dominio transformado, calcule la respuesta al escalón de los sistemas LTI representados mediante las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y''(t) + 2y'(t) - 15y(t) = x(t)$

b) $y''(t) + \frac{1}{2}y'(t) = x(t)$

c) $y''(t) + 6y'(t) + 13y(t) = x(t)$

Para resolver el ejercicio, primero debemos reescribir las ecuaciones dadas.

La función de transferencia $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$. Nosotros tenemos las ecuaciones en el dominio temporal, así que transformamos los dominios:

- * Las y las reemplazo por s
- * Las "comillas" del orden de derivada por números
- * Cambio las t por s .

En resumen:

a) $s^2 Y(s) + 2s Y(s) - 15 Y(s) = X(s)$

b) $s^2 Y(s) + \frac{1}{2}s Y(s) = X(s)$

c) $s^2 Y(s) + 6s Y(s) + 13 Y(s) = X(s)$

Y despejo $H(s)$, pasando $Y(s)$ dividiendo e invirtiendo la igualdad.

A) $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s - 15}$

B) $H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{2}s}$

C) $H(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 13}$

Ahora tenemos nuestras funciones de transferencia, así que podremos calcular la respuesta al escalón.

Para calcularla, multiplicamos las funciones de transferencia por $\frac{1}{s}$ y realizamos la inversa de la transformada de Laplace.

A) $Y(s) = H(s) X(s) \xRightarrow{\downarrow \frac{1}{s}} \frac{1}{s^2 + 2s - 15} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 - 15s}$



Simplificamos y descomponemos en fracciones simples:

$$1 = A(s+5)s + B(s-3)s + C(s-3)(s-5)$$

$$\otimes \text{ con } s = -5, B = \frac{1}{40}$$

$$\otimes \text{ con } s = 3, A = \frac{1}{24}$$

$$\otimes \text{ con } s = 0, C = \frac{1}{15}$$



$$H(s)X(s) = \frac{1}{24} \frac{1}{s-3} + \frac{1}{40} \frac{1}{s+5} + \frac{1}{15} \frac{1}{s} \Leftrightarrow \text{inversión}$$

$$y(t) = \frac{1}{24} e^{3t} u(t) + \frac{1}{40} e^{-5t} + \frac{1}{15} u(t)$$

B) Repetimos el proceso:

$$\frac{1}{s^2 + \frac{1}{2}s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^3 + \frac{1}{2}s^2} \Rightarrow \frac{1}{s^3 + \frac{1}{2}s^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s + \frac{1}{2}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{con } s = 1 \\ \downarrow \\ A = -4 \\ B = 2 \\ C = 4 \end{array} \right\}$$

$$s^2(s + \frac{1}{2}) = 0$$

$$s = 0, 0, -\frac{1}{2}$$

$$H(s)X(s) = -4 \frac{1}{s} + 2 \frac{1}{s^2} + 4 \frac{1}{s + \frac{1}{2}} \Leftrightarrow \text{inversión} \Rightarrow y(t) = (-4 + 2t + 4e^{-\frac{t}{2}})u(t)$$

C) Repetimos el proceso:

$$H(s)X(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 13} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 13s} \Rightarrow 1 = A(s^2 + 6s + 13) + B(s)$$

$$s(s^2 + 6s + 13) = 0$$

$$s = 0, -3 + 2i, -3 - 2i$$

con ω

$$\otimes \text{ con } s = 0, A = \frac{1}{13}$$

$$\otimes \text{ con } s = 1, B = -\frac{7}{13}$$



$$H(s)X(s) = \frac{1}{13} \frac{1}{s} - \frac{7}{13} \frac{2}{(s+3)^2 + 2^2} \Rightarrow \text{inversión} \Rightarrow y(t) = \left(\frac{1}{13} - e^{-3t} \sin(2t) \right) u(t)$$

