

Ejercicios Tema 2: Análisis Espectral de Señales

Ejercicio 2.1

- Calcule el desarrollo en serie trigonométrica de Fourier para la señal $f(t)$ de la Figura 2.1.
- Calcule también los coeficientes del desarrollo en serie compleja de Fourier.
- Compruebe la correspondencia que existe entre los coeficientes del desarrollo trigonométrico y del desarrollo exponencial calculando los unos a partir de los otros.

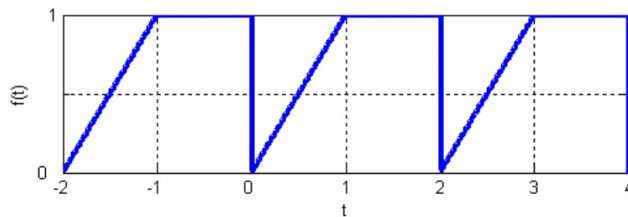


Figura 1. Señal $f(t)$ para el ejercicio 2.1

Primero definimos la función de la señal periódica $f(t)$:

* de $(0,1)$ $f(t)$ crece de $y=0$ a $y=1$.

* de $(1,2)$ $f(t)$ es cte en $y=1$.

* el periodo de $f(t)$ es $T=2$.

luego $f(t)$ queda definido como $f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 1 & 1 < t < 2 \end{cases}$

A) El desarrollo en serie de Fourier permite descomponer una señal periódica $x(t)$ con frecuencia fundamental f_0 como una suma de señales seno y coseno:

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)]$$

donde a_n y b_n representan la contribución de los sumandos seno y cosenos armónicos a la construcción de la señal periódica:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt$$

la relación entre f_0 y T_0 viene dado por $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

Tenemos $f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 1 & 1 < t < 2 \end{cases}$, y queremos saber a_n y b_n . El

periodo T_0 es 2, entonces $f_0 = \frac{1}{2}$. Con estos datos, procedemos al cálculo de ambos parámetros:

[Firma]

SERIE TRIGONOMÉTRICA

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt = \int_{-1}^1 f(t) \cos(2\pi n \boxed{\frac{1}{2}} t) dt =$$

$$= \int_{-1}^0 \cos(\cancel{2\pi n} \frac{1}{2} t) dt + \int_0^1 t \cos(\cancel{2\pi n} \frac{1}{2} t) dt =$$

AL SER UNA FUNCIÓN POR PARTES, DESCOMONGO LA INTEGRAL.

APICO INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\Rightarrow \int_{-1}^0 \cos(\pi n t) dt = \frac{1}{\pi n} \int_{-1}^0 \pi n \cos(\pi n t) dt = \left[\frac{\sin(\pi n t)}{\pi n} \right]_{-1}^0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 t \cos(\pi n t) dt = \left\{ \begin{array}{l} u=t \quad du=dt \\ \uparrow \\ dv=\cos(\pi n t) \quad v=\frac{\sin(\pi n t)}{\pi n} \end{array} \right\} =$$

$$= t \cdot \frac{\sin(\pi n t)}{\pi n} - \int_0^1 \frac{\sin(\pi n t)}{\pi n} dt = t \frac{\sin(\pi n t)}{\pi n} - \frac{1}{\pi n} \int_0^1 \sin(\pi n t) dt =$$

$$= t \cdot \frac{\sin(\pi n t)}{\pi n} + \frac{1}{\pi^2 n^2} \int_0^1 -\pi n \sin(\pi n t) dt = \left[t \frac{\sin(\pi n t)}{\pi n} \right]_0^1 + \left[\frac{\cos(\pi n t)}{\pi^2 n^2} \right]_0^1$$

$$= \left[\frac{\sin(\pi n t)}{\pi n} \right]_{-1}^0 + \left[t \frac{\sin(\pi n t)}{\pi n} + \frac{\cos(\pi n t)}{\pi^2 n^2} \right]_0^1 = \left[\frac{\sin(0)}{\pi n} - \left(\frac{\sin(-\pi n)}{\pi n} \right) \right] +$$

$$\left[1 \cdot \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} + \frac{\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \left(0 \cdot \frac{\sin(0)}{\pi n} + \frac{\cos(0)}{\pi^2 n^2} \right) \right] = \boxed{\frac{\cos(\pi n) - 1}{\pi^2 n^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \\ \cos(n) = -1, \text{ entonces,} \\ \cos(\pi n) = (-1)^n \end{array} \right\}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt = \int_{-1}^1 f(t) \sin(2\pi n \boxed{\frac{1}{2}} t) dt =$$

$$= \int_{-1}^0 \sin(\cancel{2\pi n} \frac{1}{2} t) dt + \int_0^1 t \sin(\cancel{2\pi n} \frac{1}{2} t) dt =$$

AL SER UNA FUNCIÓN POR PARTES, DESCOMONGO LA INTEGRAL.

$$\Rightarrow -\frac{1}{nn} \int_{-1}^0 -nn \operatorname{sen}(nnt) dt = \left[-\frac{\cos(nnt)}{nn} \right]_{-1}^0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 t \operatorname{sen}(nnt) dt = \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad du = dt \\ dv = \operatorname{sen}(nnt) \quad v = -\frac{\cos(nnt)}{nn} \end{array} \right\} =$$

$$= -t \cdot \frac{\cos(nnt)}{nn} - \int_0^1 -\frac{\cos(nnt)}{nn} dt = \left[\frac{\operatorname{sen}(nnt)}{n^2 n^2} \right]_0^1 \left[t \cdot \frac{\cos(nnt)}{nn} \right]_0^1$$

$$= \left[-\frac{\cos(nnt)}{nn} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{\operatorname{sen}(nnt)}{n^2 n^2} \right]_0^1 \left[t \cdot \frac{\cos(nnt)}{nn} \right]_0^1 =$$

$$= \left[-\frac{\cancel{\cos(0)}}{nn} - \left(-\frac{\cancel{\cos(-nn)}}{nn} \right) \right] + \left[\frac{\cancel{\operatorname{sen}(nn)}}{n^2 n^2} - 1 \cdot \frac{\cancel{\cos(nn)}}{nn} - \left(\frac{\cancel{\operatorname{sen}(0)}}{nn} - 0 \cdot \frac{\cancel{\cos(0)}}{nn} \right) \right] =$$

$$= -\frac{1}{nn}$$

Ahora solo falta calcular $a_0 =$

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cos(2nnf_0 t) dt = \int_{-1}^1 f(t) \cos(\cancel{2nn \frac{1}{2} t}) dt =$$

AL SER UNA FUNCIÓN POR PARTES, DESCOMONGO LA INTEGRAL.

$$\int_{-1}^0 dt + \int_0^1 t dt = [t]_{-1}^0 + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

El desarrollo en serie de Fourier resulta:

$$x(t) \sim \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2 n^2} \cos(nnt) - \frac{1}{nn} \sin(nnt) \right]$$

B) El desarrollo en serie compleja de Fourier viene dado por:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}, \text{ donde los coeficientes } D_n \text{ son complejos y } D_n \text{ y } D_{-n}$$

complejo-conjugados:

$$D_0 = \frac{a_0}{2} \text{ y } D_{\pm n} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{\mp jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{2}(a_n \mp jb_n).$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) e^{-jn\pi t} dt =$$

FUNCIÓN POR PARTES

$$\frac{1}{2} \left[\int_1^2 e^{-jn\pi t} dt + \int_0^1 t e^{-jn\pi t} dt \right] = -\frac{1}{jn\pi} \int_1^2 -jn\pi e^{-jn\pi t} dt + \int_0^1 t e^{-jn\pi t} dt =$$

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{jn\pi} \left[e^{-jn\pi t} \right]_1^2 + \left[-t \cdot \frac{e^{-jn\pi t}}{jn\pi} - \frac{1}{n^2\pi^2} e^{-jn\pi t} \right]_0^1 \right] =$$

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{jn\pi} (e^{-2j\pi n} - e^{-j\pi n}) + \left[-\frac{e^{-j\pi n}}{jn\pi} - \frac{e^{-j\pi n}}{n^2\pi^2} - \left(-\frac{1}{n^2\pi^2} \right) \right] \right]$$

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{e^{-2j\pi n}}{jn\pi} - \frac{1 - e^{-j\pi n}}{n^2\pi^2} \right] = -\frac{1 - e^{-j\pi n}}{2n^2\pi^2} - \frac{e^{-2j\pi n}}{2jn\pi} =$$

$$= -\frac{1 - [\cancel{\cos(\pi n)} + j\cancel{\sin(\pi n)}]}{2n^2\pi^2} - \frac{\cancel{\cos(2\pi n)} + \cancel{\sin(2\pi n)}}{2jn\pi} =$$

Relación de Euler
 $e^{-j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{2n^2\pi^2} - \frac{1}{2jn\pi}$$

c) La relación entre los coeficientes a_n , b_n y a_0 , con los coeficientes conjugados viene dado por:

$$D_0 = \frac{a_n}{2} \quad \text{y} \quad D_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad \text{es decir, en nuestro caso:}$$

$$D_0 = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad D_{\pm n} = \frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \boxed{\pm} j \frac{1}{n\pi} \right)$$

$\rightarrow$ CASO $\oplus$ $a_n - jb_n$
 CASO $\ominus$ $a_n + jb_n$

$$(-) \cdot (-) = +$$

$$(+) \cdot (-) = -$$



Ejercicio 2.2 Determine si las siguientes señales son periódicas. Obtenga su representación en el dominio de la frecuencia:

a) $x(t) = \sin(3t)u(t)$

b) $y(t) = \cos(\omega_0 t)u(t) + \cos(-\omega_0 t)u(-t)$

Una función $f(t)$ es periódica si cumple que $f(t) = f(t+nT)$, siendo T el periodo y n un número natural

A) $x(t) = \sin(3t)u(t) \rightarrow$ ¿Es periódica?

$$x(t) = x(t+T) \Rightarrow \sin(3t)u(t) = \sin(3(t+nT))u(t+nT)$$

Periodo de la función seno viene dado por la velocidad angular $\omega = 3$, de modo que el periodo $T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$.

El periodo de la función $u(t)$ que hace referencia a la función escalón o de Heaviside no es periódica.

Cuando $t < 0$, la función pierde su periodicidad. Luego la función no es periódica.

B) $y(t) = \cos(\omega_0 t)u(t) + \cos(-\omega_0 t)u(-t)$.

la función coseno, por definición, es periódica.

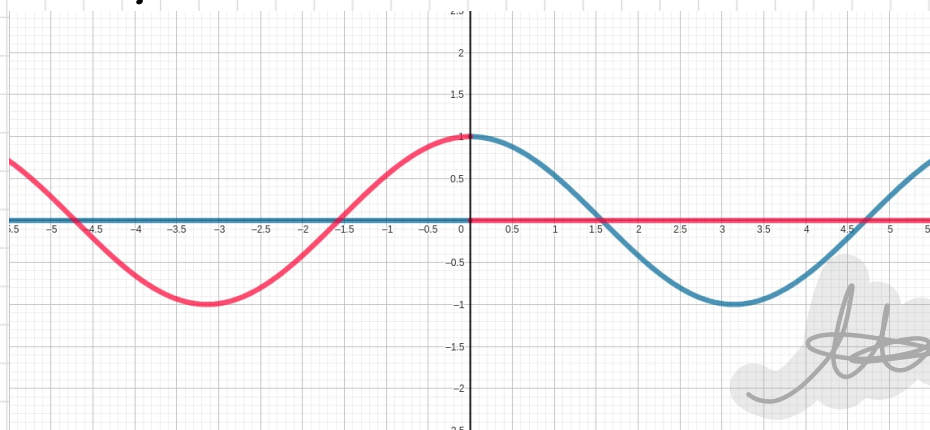
la función escalón no.

Sin embargo, si observamos atentamente, vemos que la función está dividida en dos partes:

$\odot \cos(\omega_0 t)u(t) \rightarrow$ cuando $t > 0$ la función es periódica
 $\otimes \cos(-\omega_0 t)u(-t) \rightarrow$ cuando $t < 0$ la función es periódica
 luego $u(t) + u(-t) = 1$ constante...
 $\cos(-\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t)$

la función es periódica:

* asumimos $\omega_0 = 1$ para la representación en GeoGebra.



Ahora, para pasar las funciones al dominio de las frecuencias, aplicamos la transformada de Fourier directa: $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

A) $x(t) = \sin(3t) u(t) \Rightarrow$ Tr. Fourier:

APLICO INTEGRAL POR PARTES

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(3t) u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^T \sin(3t) e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \begin{cases} u = e^{-j\omega t} & du = -j\omega e^{-j\omega t} dt \\ dv = \sin(3t) & v = -\frac{\cos(3t)}{3} \end{cases}$$

$$= \left[-\frac{e^{-j\omega t} \cdot \cos(3t)}{3} \right]_0^T - \frac{1}{3} j\omega \int_0^T \cos(3t) e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \begin{cases} u = e^{-j\omega t} & du = -j\omega e^{-j\omega t} dt \\ dv = \cos(3t) & v = \frac{\sin(3t)}{3} \end{cases} =$$

$$= \left[\frac{e^{-j\omega t} \sin(3t)}{3} \right]_0^T + \frac{1}{3} j\omega \int_0^T \sin(3t) e^{-j\omega t} dt$$

cíclica, entonces:

$$\frac{\left[-\frac{e^{-j\omega t} \cos(3t)}{3} \right]_0^T - \frac{1}{3} j\omega \left[\frac{e^{-j\omega t} \sin(3t)}{3} \right]_0^T}{\frac{1}{3} j\omega} = \int_0^T y(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{con } T = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{-e^{-j\omega T} (3 \cos(3T) + 3 \sin(3T) i)}{6j}$$

B) $y(t) = \cos(\omega_0 t) u(t) + \cos(\omega_0 t) u(-t) \Rightarrow$ Transformada de Fourier

$$y(t) = \cos(\omega_0 t) (\cancel{u(t)} - \cancel{u(-t)}) = \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \int_0^T \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega_0 t} dt =$$

$\Rightarrow$ INTEGRAL POR PARTES $\Rightarrow$

$$\begin{cases} u = e^{-j\omega_0 t} & du = -j\omega_0 e^{-j\omega_0 t} \\ dv = \cos(\omega_0 t) & v = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \end{cases} \left\{ = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} e^{-j\omega_0 t} \right|_0^T - \int_0^T v du =$$

$$= \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} e^{-j\omega_0 t} \Big|_0^T + j \int_0^T \sin(\omega_0 t) e^{-j\omega_0 t} dt \Rightarrow \text{integral por partes}$$

$$\begin{cases} u = e^{-j\omega_0 t} & du = -j\omega_0 e^{-j\omega_0 t} \\ dv = \sin(\omega_0 t) & v = -\frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0} \end{cases} \left\{ = -\frac{e^{-j\omega_0 t} \cos(\omega_0 t)}{\omega_0} \right|_0^T + j \int_0^T \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega_0 t} dt =$$

$$= \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} e^{-j\omega_0 t} - \frac{\cos(\omega_0 t) e^{-j\omega_0 t}}{\omega_0} \Big|_0^T = \int_0^T \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{e^{-j2\pi} (\sin(2\pi) - \cos(2\pi))}{j\omega} = \int_0^T \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega_0 t} dt$$



Ejercicio 2.3 Obtenga la representación en el dominio del tiempo de la señal dada en la Figura 2.2.

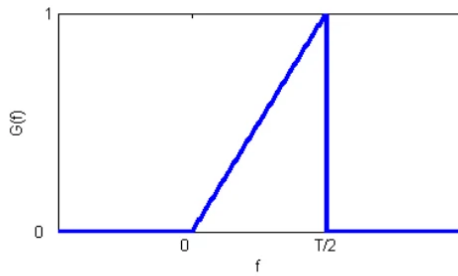


Figura 2. Señal $G(f)$ para el ejercicio 2.2

Primero definimos la función $G(f)$:

$$G(f) = \begin{cases} \frac{2}{T} f & 0 < f < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{otros casos.} \end{cases}$$

Tenemos que aplicar la transformada de Fourier inversa:

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df = \int_0^{T/2} \frac{2}{T} f e^{j2\pi f t} df = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f e^{j2\pi f t} df =$$

$$\Rightarrow \text{INTEGRAL POR PARTES} = \begin{cases} u = f & du = df \\ dv = e^{j2\pi f t} & v = \frac{e^{j2\pi f t}}{j2\pi t} \end{cases} =$$

$$= \frac{2}{T} \left[\left[f \frac{e^{j2\pi f t}}{j2\pi t} \right]_0^{T/2} - \left[\frac{e^{j2\pi f t}}{(j2\pi t)^2} \right]_0^{T/2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 t^2 T} \left(e^{j\pi t T} - 1 \right) - e^{j\pi t T} j = G(t)$$

Ejercicio 2.4 Calcule la transformada de Fourier de la señal $x(t)$ que se encuentra en la Figura 2.3.

Definimos la función $x(t)$:

$$x(t) = \begin{cases} 1+t & -1 < t < 0 \\ 1 & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 < t < 2 \\ t-3 & 2 < t < 3 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

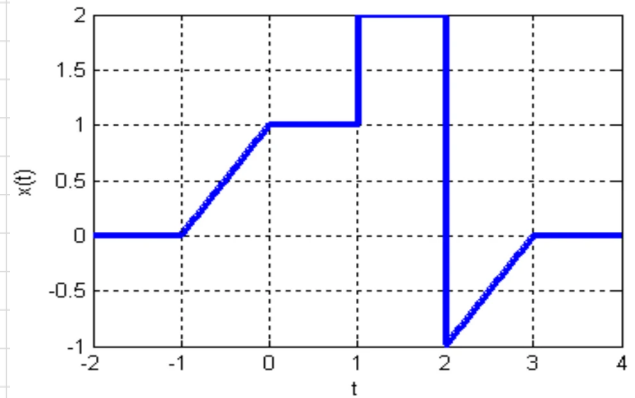


Figura 3. Señal $x(t)$ para el ejercicio 2.3

Aplicamos la transformada de Fourier directa $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$.

$$X(\omega) = \int_{-1}^0 (1+t) e^{-j\omega t} dt + \int_0^1 e^{-j\omega t} dt + 2 \int_1^2 e^{-j\omega t} dt + \int_2^3 (t-3) e^{-j\omega t} dt \Leftrightarrow$$

$$\otimes \int_{-1}^0 e^{-j\omega t} dt + \int_{-1}^0 t e^{-j\omega t} dt \Leftrightarrow -\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \Big|_{-1}^0 - t \frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{j\omega} \int_{-1}^0 e^{-j\omega t} dt \Leftrightarrow$$

por partes

$$-\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \Big|_{-1}^0 - t \frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \Big|_{-1}^0 + \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2} \Big|_{-1}^0 \Leftrightarrow \frac{e^{j\omega} - 1}{j\omega} + \frac{e^{j\omega}}{j\omega} + \frac{1}{\omega^2} - \frac{e^{j\omega}}{\omega^2} \Leftrightarrow$$

$$e^{j\omega} \left[\frac{2}{j\omega} - \frac{1}{\omega^2} \right] - \frac{1}{\omega^2}$$

$$\otimes \int_0^1 e^{-j\omega t} dt = -\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \Big|_0^1 = \frac{e^{-j\omega} - 1}{j\omega}$$

$$\otimes \int_1^2 e^{-j\omega t} dt = -\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \Big|_1^2 = \frac{e^{-2j\omega} - e^{-j\omega}}{j\omega}$$

$$\otimes \int_2^3 t e^{-j\omega t} dt - 3 \int_2^3 e^{-j\omega t} dt = -\frac{t e^{-j\omega t}}{j\omega} \Big|_2^3 + \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2} \Big|_2^3 - 3 \frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \Big|_2^3 \Leftrightarrow$$

por partes

$$\cancel{3 \frac{e^{-3j\omega} - e^{-2j\omega}}{j\omega}} + \frac{e^{-3j\omega} - e^{-2j\omega}}{\omega^2} - \cancel{3 \frac{e^{-3j\omega} - e^{-2j\omega}}{j\omega}}$$

Juntamos las piezas:

$$x(t) = e^{j\omega} \left[\frac{2}{j\omega} - \frac{1}{\omega^2} \right] - \frac{1}{\omega^2} + \frac{e^{-j\omega} - 1}{j\omega} - 2 \frac{e^{-2j\omega} - e^{-j\omega}}{j\omega} + \frac{e^{-3j\omega} - e^{-2j\omega}}{\omega^2}$$

⊗ Se puede simplificar más.



$$x(t) = e^{at}u(-t) \quad a > 0$$

El teorema de Parseval dice que la energía de una señal es la misma en cualquier dominio: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(f)|^2 df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\omega)|^2 d\omega$.

Con $x(t) = e^{at}u(-t)$, aplicando la transformada de Fourier directa:

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{t(a-j\omega)} dt =$$

$$x(\omega) = \left. \frac{e^{t(a-j\omega)}}{a-j\omega} \right|_{-\infty}^0, \text{ usamos límites para resolverlo (integral impropia):}$$

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^{t(a-j\omega)}}{a-j\omega} \right]_b^0 = \frac{1}{a-j\omega} - \left[\frac{e^{b(a-j\omega)}}{a-j\omega} \right] = \frac{1}{a-j\omega} = x(\omega)$$

Ahora calculamos la energía:

$$E_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 e^{2at} dt = \lim_{b \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^{2at}}{2a} \right]_b^0 =$$

$$E_1 = \frac{1}{2a} - \frac{e^{2ab}}{2a} = \frac{1}{2a}$$

$$E_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{a-j\omega} \right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + \omega^2} d\omega =$$

módulo de $a-j\omega = \sqrt{a^2 + \omega^2}$
↑ elevo a 2

$$E_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + \omega^2} d\omega = \left\{ \begin{array}{l} \text{CAMBIO VARIABLE} \\ u = \frac{\omega}{a}, \quad \omega = au, \quad d\omega = a du \end{array} \right\} =$$

$$E_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{(au)^2 + a^2} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2(u^2 + 1)} du = \frac{1}{2\pi a} [\arctan(u)]_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$E_2 = \frac{1}{2\pi a} \left[\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} \rightarrow \text{integral impropia}$$

$$E_2 = \frac{1}{2\pi a} \lim_{b \rightarrow -\infty} \left[\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\pi a} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{2\pi a} = \frac{1}{2a}$$

Se cumple el Teorema de Parseval !!