

EJERCICIOS TEMA 1: SEÑALES Y SISTEMAS



SCAN ME

Ejercicio 1.1 Dada la señal $x(t) = \begin{cases} t-1 & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$, calcule la expresión analítica de las señales:

- a) $x_1(t) = x(-t)$
- b) $x_2(t) = x(2-t)$
- c) $x_3(t) = x(t/2)$
- d) Represente gráficamente $x(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$.

¿Algun comentario o sugerencia para mejorar este recurso?

Resolver este ejercicio es tan fácil como sustituir lo que tengo entre los paréntesis de cada $x(\dots)$ en la propia función, es decir: $x_1(t) = x(t-4) = \begin{cases} t-4-1 & 1 < t-4 < 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

* ejemplo

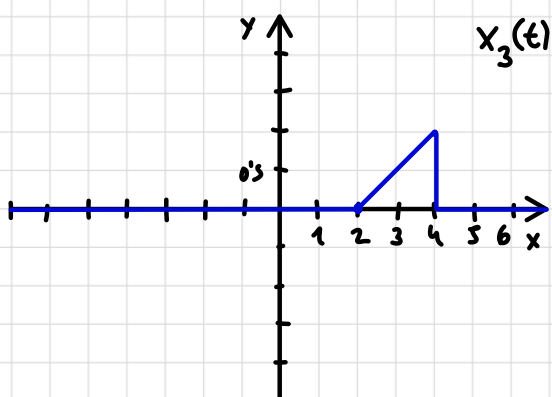
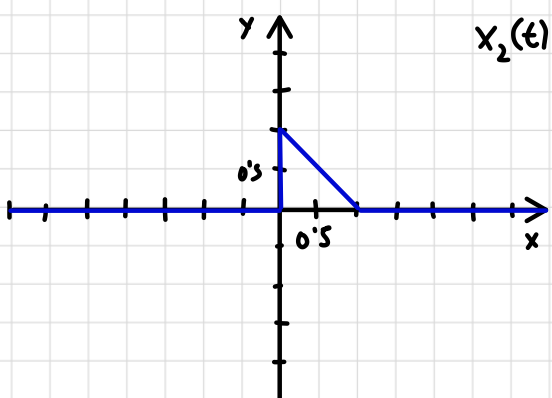
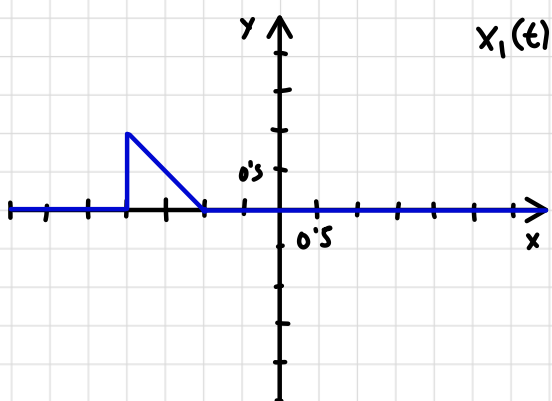
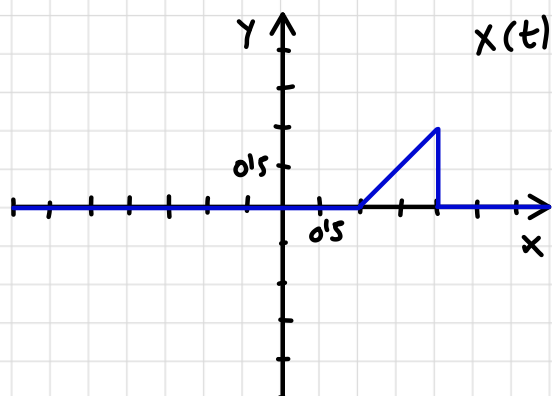
CASO DE INVERSIÓN TEMPORAL

$$x_1(t) = x(-t) = \begin{cases} -t-1 & 1 < -t < 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

CASO DE DESPLAZAMIENTO + INVERSIÓN

$$x_2(t) = x(2-t) = \begin{cases} 2-t-1 & 1 < 2-t < 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$x_3(t) = x(t/2) = \begin{cases} t/2-1 & 1 < t/2 < 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$



Handwritten signature

Ejercicio 1.2 Calcule las partes par e impar de la señal $x(t)$ anterior, y represente gráficamente el resultado obtenido.

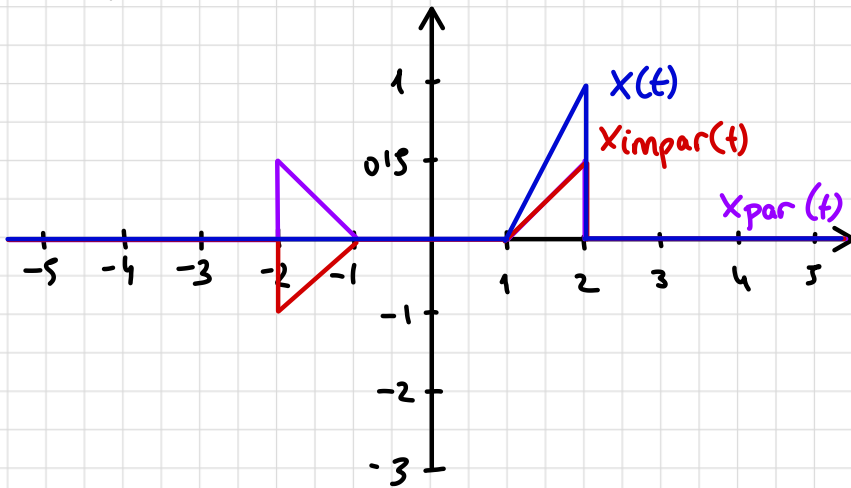
Toda señal la podemos deconstruir en la suma de una parte par y otra impar:

$$x(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} + \frac{x(t) - x(-t)}{2} = x_{\text{par}}(t) + x_{\text{impar}}(t).$$

Con $x(t) = \begin{cases} t-1 & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$, entonces x_{par} e x_{impar} serán:

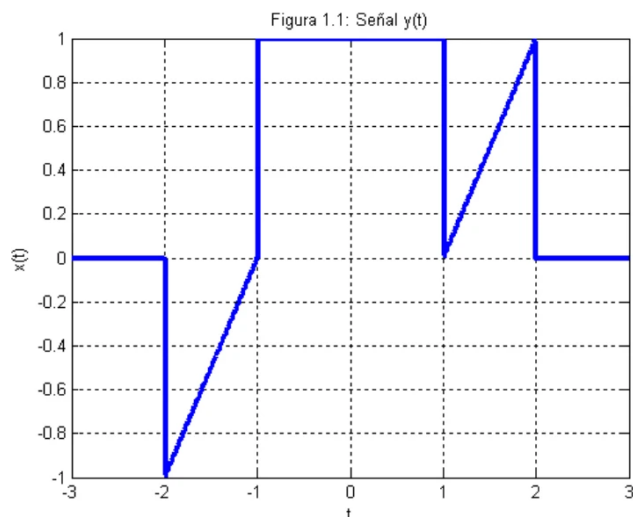
$$x_{\text{par}}(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{2} & 1 < t < 2 \\ -\frac{t-1}{2} & -2 < t < -1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad \text{e} \quad x_{\text{impar}} = \begin{cases} \frac{t-1}{2} & -2 < t < -1, 1 < t < 2 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Gráficamente resulta como:



Handwritten signature

Ejercicio 1.3 Calcule la señal $z(t) = y(1-2t)$, donde la señal $y(t)$ viene dada por la Figura 1.1.



Construimos la función $y(t)$ que cumpla:

- * en $(-2, -1)$ $y(t)$ decrece
- * en $(-1, 1)$ $y(t)$ es cte.
- * en $(1, 2)$ $y(t)$ crece
- * en $(2, \infty)$ $y(t)$ cte

entonces: $y(t) = \begin{cases} t+1 & -2 < t < -1 \\ 1 & -1 < t < 1 \\ t-1 & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

y simplifico

* Sustituyo

Ahora calculamos $z(t) = y(1-2t) = \begin{cases} 2-2t & -2 < 1-2t < -1 \\ 1 & -1 < 1-2t < 1 \\ -2t & 1 < 1-2t < 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

[Handwritten signature]

Ejercicio 1.4 Calcule la energía total y la potencia media para las siguientes señales:

a) $x(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t) & -\frac{\pi}{\omega_0} < t < \frac{\pi}{\omega_0} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

b) Una señal periódica, cuyo periodo $T=2$ viene dado por: $y(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ -1 & 1 < t < 2 \end{cases}$

Para calcular la energía total E_x , $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$

Para A) $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{\omega_0}} 0 dt + \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} [\cos(\omega_0 t)]^2 dt + \int_{\frac{\pi}{\omega_0}}^{+\infty} 0 dt \Leftrightarrow$

$$E_x = \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} [\cos(\omega_0 t)]^2 dt = \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \frac{\cos^2(x)}{\omega_0} dx = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \cos^2(x) dx =$$

CAMBIO DE VARIABLE

$$\omega_0 t = x$$

$$\omega_0 dt = dx$$

IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$E_x = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} 1 dx + \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \cos(2x) dx \right] =$$

$$E_x = \frac{1}{2\omega_0} \left[\left[x \right]_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} 2 \cos(2x) dx \right] = \frac{1}{2\omega_0} \left[\left[x \right]_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} + \frac{1}{2} \left[\sin(2x) \right]_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \right] =$$

$$E_x = \frac{1}{2\omega_0} \left[\left[\omega_0 t \right]_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} + \frac{1}{2} \left[\sin(2\omega_0 t) \right]_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \right] = \frac{1}{2\omega_0} \left(2\pi + \frac{1}{2} (\sin(2\pi) - \sin(-2\pi)) \right) =$$

DESHACEMOS CAMBIO VARIABLE

$E_x = \frac{\pi}{\omega_0} \rightarrow$ Energía finita

b) Con $y(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ -1 & 1 < t < 2 \end{cases}$ y periódico cada $T=2$,

$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} dt = +\infty \rightarrow$ Energía infinita

Para calcular la potencia media P_x , $P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{E_x}{T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$

Para A) $P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{\omega_0}}{T} = \frac{1}{\infty} = 0 //$

Periodo = $\left| -\frac{\pi}{\omega_0} \right| + \left| \frac{\pi}{\omega_0} \right| = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} [\cos(\omega_0 t)]^2 dt = \frac{\pi}{\omega_0}$$

B) $P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \left[t \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 1 //$

⚠ Solo calculamos para un periodo dado que es una señal periódica.

Ejercicio 1.5 Determine si los siguientes sistemas son causales, estables, invariantes al tiempo y lineales:

- a) $y(t) = \sin[x(t)]$
- b) $y(t) = x^2(t-1)$
- c) $y(t) = u(t)$
- d) $y(t) = tx^2(-t)$
- e) $y(t) = x(t) + x(-t)$

Decimos que un sistema es **causal** cuando un sistema $y(t)$ solo depende de valores actuales y pasados y no futuros, por ejemplo:

$y(t) = x(t-1) \rightarrow$ la entrada se ha retrasado una unidad de tiempo.

El sistema ya se inició una ud. de tiempo antes.

$y(t) = x(t+1) \rightarrow$ la entrada se ha adelantado una ud posterior. Cuando el sistema esté en $t=0$, nosotros queremos saber que pasa en $t=-1$, es decir, el futuro.

Decimos que un sistema es **invariante con el tiempo** cuando al aplicar un retraso/adelanto en el tiempo, la salida se retrasa/adelanta en tiempo.

Un sistema es **estable** cuando a una entrada limitada en amplitud produce una salida limitada en amplitud (acotada), es decir, que la salida sea un valor concreto y no $\pm \infty$.

Un sistema es **lineal** cuando se cumple: 1) en aditiva: $x_1, x_2 \rightarrow f(x_1), f(x_2)$,
 $x_1 + x_2 \rightarrow f(x_1) + f(x_2)$

2) que es homogénea: $Kx \rightarrow Kf(x)$.

Entonces (resumido):

	a	b	c	d	e
CAUSAL	✓	✓	✓	✗	✗
ESTABLE	✓	✓	✓	✗	✓
INVARIANTE	✓	✓	✗	✗	✓
LINEAL	✗	✗	✗	✗	✓

a) $y(t) = \sin[x(t)]$

b) $y(t) = x^2(t-1)$

c) $y(t) = u(t) \rightarrow$ función escalón unidad

d) $y(t) = tx^2(-t)$

e) $y(t) = x(t) + x(-t)$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

A) $y(t) = \sin[x(t)]$

Es estable por que la salida está acotada entre $[-1, 1]$. No es lineal por que la salida es una función sinusoidal. Lo demás es trivial.

B) $y(t) = x^2(t-1)$

Es estable por que los valores de la señal de salida pertenecen al subconjunto A^2 , dado por el producto de los subconjuntos A y A de $x(t)$ y $x(t)$ respectivamente. Lo demás es trivial.

C) $y(t) = u(t)$

Es estable por que la salida está acotada en el intervalo $[0, 1]$. No es lineal por que, con $t=0 \rightarrow y(0)=1$; $t=1 \rightarrow y(1)=1$; $(t=0+t=1)=(t=1) \rightarrow y(t=1) \neq y(t=0)+y(t=1)$. No es invariante con el tiempo por que si desplazamos temporalmente un tiempo T a la función $u(t)$, tal que $u(t-T)$, entonces:

$u(t-T) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < T \\ 1 & \text{si } t \geq T \end{cases}$, entonces para $u(t-T)=0$ si $t < T$ y 1 si $t \geq T$. A menos que $T=0$, no se cumple que $u(t)=u(t-T)$. El resto es trivial.

d) $y(t) = tx^2(-t)$

No es causal por que, para $t < 0$, el sistema requiere de valores futuros. No es estable por el producto de t (tiende a $\pm\infty$) por $x^2(\dots)$, luego, la señal de salida no está acotada. No es lineal por que los valores de salida no pertenecen al subconjunto A^2 , debido al producto de $t \cdot x^2(\dots)$. No es invariante con el tiempo por el producto de $t \cdot x^2(\dots)$, la parte cte. del sistema cambia.

e) $y(t) = x(t) + x(-t)$

Es causal si $t > 0$. Es invariante por que la parte cte. no cambia en ningún momento. Es estable por que los valores de la señal de salida pertenecen al subconjunto de valores $x(t)$. Lo demás es trivial.

¿Algun comentario o sugerencia para mejorar este recurso?



SCAN ME

