

ANEXO V. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

En este Anexo abordaremos el concepto del dinero y cómo resolver un problema de economía.

En relación con el dinero, como ya hemos comprobado, este ha llegado para quedarse. Cumple, en términos generales, dos funciones fundamentales:

1. Ser un instrumento homogéneo de valorización de bienes de distintas naturalezas.
2. Ser un instrumento que facilita el aplazamiento en el consumo (por ejemplo, créditos, cartas de pago, etc.)

En este sentido, el dinero no solo nos permite asignar un valor a las cosas, sino también decidir cuándo y cuánto debemos abonar por ellas. Este último aspecto introduce el valor de la subjetividad en su definición. Como hemos analizado en anexos previos, el valor del dinero no es fijo y fluctúa constantemente.

Cuando se trata de tomar decisiones y realizar transacciones, lo habitual es enfrentarse a situaciones en las que se opta por renunciar a una cantidad de dinero en el presente, con la promesa de recibirla en el futuro. Y la cuestión crucial es: ¿qué interés se pagará por ello?

De esta forma, al renunciar a un dinero en el presente, esperamos que, después de un tiempo, se nos devuelva una cantidad superior, lo que refleja no solo el valor original, sino también la compensación correspondiente por la espera.

Describiendo una situación. Modelización de una situación.

Para trabajar con el dinero en un contexto temporal, es necesario darle una estructura o modelo que permita definir de manera precisa las variables involucradas. En este sentido, se consideran las siguientes variables:

- Q_0 es la **cantidad de dinero a la que se renuncia en el momento presente.**

Cuando tu amiga se llama "IVANA", pero le dices "ANA" para ahorrarte el IVA



- n es la **duración de la operación**, el número de períodos de tiempo durante los que se renuncia a una cantidad de dinero.
- k se define como la **tasa de interés**, expresada en porcentaje (o tanto por uno), que refleja la compensación que se espera recibir por el aplazamiento del importe monetario.
- Q_n es la cantidad de dinero que se debe recibir al final de los n periodos.
- I_n es el importe total que se paga como compensación por los n periodos de tiempo. Se calcula como $I_n = Q_n - Q_0$.

Desde una perspectiva económica, es común llevar a cabo operaciones en las que se decide renunciar (o evitar pagar) a una cantidad de dinero en el presente con la expectativa (u obligación) de recibir (o pagar) una cantidad mayor en el futuro, después de transcurrir n períodos de tiempo. Esa cantidad futura debe ser suficiente para cubrir el monto que originalmente debió haberse recibido (o cobrado), más una compensación por el valor del tiempo transcurrido. Q_0 ha de convertirse en $Q_n = Q_0 + I_n$.

Es aquí donde entramos en el campo de las matemáticas financieras, las cuales constituyen los instrumentos adecuados para poder operar con el dinero.

La capitalización. El valor futuro de una cantidad actual

Se define como la operación matemática que toma una cantidad de dinero disponible en un momento determinado Q_0 , los intereses correspondientes, es decir, la compensación I_n por el paso del tiempo, y calcula su equivalente en un momento posterior Q_n .

Para ello, es necesario especificar cómo se incorporan los intereses generados a lo largo del tiempo a la cantidad inicialmente invertida. De esta forma, se pueden definir dos tipos de capitalización:

Capitalización simple

En la capitalización simple, los intereses generados al final de cada período (por lo general, un año) no se incorporan al capital original para generar nuevos intereses en los años sucesivos. Es decir, los intereses no generan más intereses. En este caso, la suma final de dinero, Q_n , se calcula de la siguiente manera:

$$Q_n = Q_0 + Q_0k + Q_0k + \dots = Q_0(1 + nk)$$

Habitualmente usaremos este tipo de capitalización en operaciones a corto plazo.

Capitalización compuesta

En la capitalización compuesta, los intereses generados al final de cada período se incorporan al capital inicial, lo que permite generar nuevos intereses en los períodos sucesivos. Es decir, los intereses generan más intereses. En este caso, la cantidad final de dinero Q_n se calcula con la fórmula:

$$Q_n = Q_0(1 + k)^n$$

Para introducir los siguientes nuevos conceptos, consideraremos la capitalización compuesta por conveniencia.

El valor futuro de una cantidad actual

De la misma forma que trabajamos con el interés para calcular un beneficio, también podemos realizar la operación inversa para ver el valor real del importe futuro en el presente. Este se calcula despejando de la expresión anterior Q_0 . Con este punto de vista, el interés lo denominaremos tasa de actualización o descuento.

Las rentas y su valor actual

La renta es una secuencia de pagos o flujos de dinero que ocurren en diferentes momentos del tiempo. Para calcular su valor en un momento específico, podemos hacerlo de dos maneras:

- **Valor futuro de la renta (al final de un periodo):** En este enfoque, calculamos el valor de todos los pagos futuros de la renta al final del último periodo (por ejemplo, al final del año n). Para hacerlo, se suma cada pago individual de la renta, pero ajustado por el interés o la capitalización que se acumula con el tiempo. La fórmula para calcular el valor futuro (FV) de una renta es:

$$FV = R_1(1 + k)^{(n-1)} + R_2(1 + k)^{(n-2)} + \dots + R_n(1 + k)^0$$

Esto significa que cada pago se "capitaliza" (se le aplica el interés) hasta llegar al final del periodo n , lo que nos da el valor total de la renta en ese momento final.

- **Valor presente de la renta (en el momento actual):** En este enfoque, lo que buscamos es el valor actual de todos los pagos futuros de la renta. Para ello, actualizamos cada pago futuro a su valor en el presente, usando una tasa de descuento (en lugar de una tasa de interés). Esto nos dice cuánto valen los pagos futuros hoy. La fórmula para calcular el valor presente (PV) de una renta es:

$$PV = \frac{R_1}{(1+k)^1} + \frac{R_2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{R_n}{(1+k)^n}$$

En este caso, cada pago futuro se “descuenta” para conocer su valor equivalente en el presente. Esto permite conocer cuánto valen todos los pagos futuros hoy.

Teniendo en cuenta lo presentado, a la hora de calcular la renta en un determinado tiempo, lo que haremos será capitalizar cada pago y descontar el valor total hasta ese punto espacial.

Contemplamos también las siguientes fórmulas para el cálculo de rentas:

- Q Y k son diferentes todos los años:

$$VA = \frac{Q_1}{1+k_1} + \frac{Q_2}{(1+k_1)(1+k_2)} + \dots + \frac{Q_n}{(1+k_1)(1+k_2) \dots (1+k_n)}$$

- k es igual todos los años, Q distinto:

$$VA = \frac{Q_1}{1+k} + \frac{Q_2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{Q_n}{(1+k)^n}$$

- Q y k son iguales todos los años:

$$VA = Q \left[\frac{1 - (1+k)^{-n}}{k} \right]$$

- Q Y k iguales todos los años y la duración de renta tiende a infinito:

$$VA = \frac{Q}{k}$$