



TEMA 5. CUADRIPOLOS (REDES DE DOS PUERTOS)

Llamamos **puerto** a una pareja de terminales a través de las cuales es posible que entre o salga corriente de una red. Los elementos de dos terminales, como resistores o condensadores, son redes de un puerto.

Los **cuadripolos** son redes de dos puertos, es decir, elementos con dos puertos diferentes para la entrada y la salida. No almacenan energía en su interior, no contiene fuentes independientes

Estos elementos suelen ser de bastante utilidad, pues pueden usarse como comodines para simplificar circuitos de gran escala. Podemos tratar fragmentos de circuitos como una caja negra incrustada en una red mayor.

Por ejemplo, si diseñas un amplificador estéreo, sabemos que tenemos una entrada de la señal y una salida amplificada. Por ejemplo, si mi interés sea conocer la ganancia de amplificación aplicada a la señal de entrada, realmente no me interesa mucho conocer cada aspecto del circuito amplificador.

Usando cuadripolos, yo puedo reducir el circuito a uno similar a la figura 19.1b.

En esencia, se usan las redes de dos puertos para simplificar y entender cómo un sistema se comporta desde fuera, en base a lo que entra y sale de este.

En este tema nos vamos a centrar en caracterizar estas *cajas negras*. Esto requiere relacionar las cantidades en las terminales V_1 , V_2 , I_1 y I_2 , de las cuales dos son independientes.

Los términos que relacionan estas tensiones y corrientes reciben el nombre de **parámetros**. Veremos 6.

PARÁMETROS Z (IMPEDANCIA)

Los parámetros de impedancia y de admitancia se suelen usar en la creación de filtros. Son útiles en el diseño y análisis de redes de acoplamiento y de impedancia, así como para las redes de distribución de potencia.

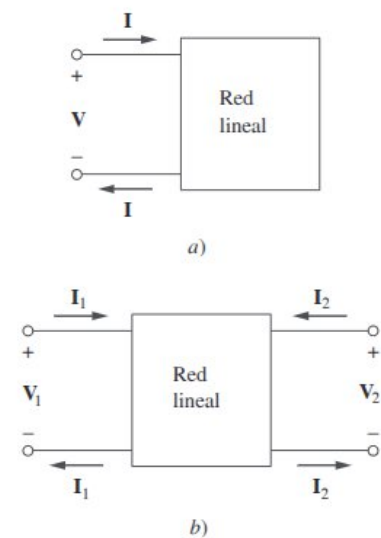


Figura 19.1
a) Red de un puerto, b) red de dos puertos.

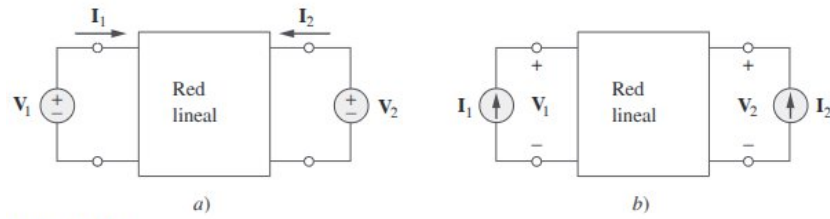


Figura 19.2

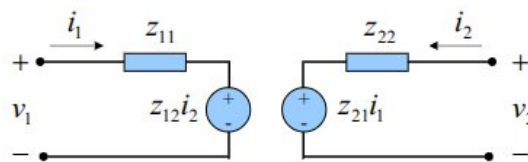
Red lineal de dos puertos: a) alimentada por fuentes de tensión, b) alimentada por fuentes de corriente.

Un cuadripolo puede alimentarse con tensión o corriente. La relación entre las tensiones y corrientes en las terminales son:

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

donde los términos z son los *parámetros de impedancia* o *parámetros z* , cuyas unidades son los ohms.



El valor de los parámetros puede evaluarse fijando $I_1 = 0$ (puerto de entrada en circuito abierto) o $I_2 = 0$ (puerto de salida en circuito abierto). Por tanto:

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

$$z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

Impedancia de entrada en circuito abierto

Impedancia de transferencia con entrada en circuito abierto

$$z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

$$z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

Impedancia de transferencia con salida en circuito abierto

Impedancia de salida con entrada en circuito abierto

Cabe destacar que en algunas redes de dos puertos no existen parámetros z , porque estos no se pueden describir con las ecuaciones de V_1 y V_2 . Dicho de otro modo, en los cuadripolos en los que no podamos relacionar las tensiones en términos de corriente, no tendrá parámetros z . Por ejemplo, el transformador ideal no tiene parámetros z .

Para obtener los parámetros z_{11} y z_{21} , conectamos un V_1 o I_1 al puerto 1 con el puerto 2 en circuito abierto, y encontrando I_1 y V_2 obtenemos:

$$z_{11} = V_1/I_1 \quad z_{21} = V_2/I_1$$

Para obtener los parámetros z_{12} y z_{22} , conectamos un V_2 o I_2 al puerto 2 con el puerto 1 en circuito abierto, y encontrando I_2 y V_1 obtenemos:

$$z_{12} = V_1/I_2 \quad z_{22} = V_2/I_2$$

PARÁMETROS Y (ADMITANCIA)

Como vimos en el anterior apartado, se dan circunstancias en los que no existen parámetros z para describir una red de dos puertos. Tenemos que recurrir a medios alternativos.

Expresando las corrientes en términos de tensiones en las terminales, obtendremos nuestro segundo conjunto de parámetros:

$$I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2$$

$$I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2$$

Los términos y reciben el nombre de *parámetros de admitancia* o *parámetros y* . Su unidad es el siemens.

El valor de los parámetros puede evaluarse fijando $V_1 = 0$ (puerto de entrada en cortocircuito) o $V_2 = 0$ (puerto de salida en cortocircuito). Por tanto:

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

Admitancia de entrada en cortocircuito

$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

Admitancia de transferencia en cortocircuito del puerto 1 al puerto 2

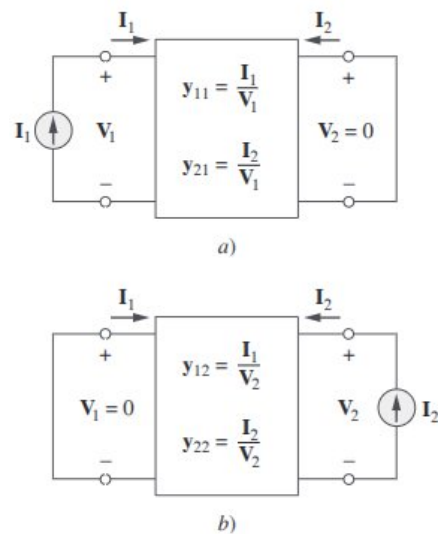


Figura 19.12

Determinación de los parámetros y :
a) determinación de y_{11} y y_{21} ,
b) determinación de y_{12} y y_{22} .

$$y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

Admitancia de transferencia en cortocircuito del puerto 2 al puerto 1

$$y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

Admitancia de salida en cortocircuito

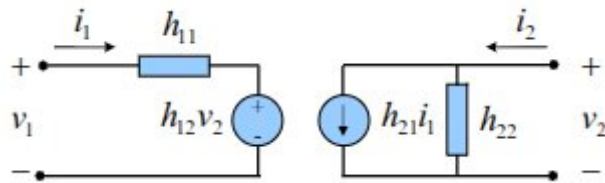
Para obtener los parámetros y_{11} y y_{21} , conectamos I_1 al puerto 1 con el puerto 2 en cortocircuito, y encontrando I_2 y V_1 obtenemos:

$$y_{11} = I_1/V_1 \quad y_{21} = I_2/V_1$$

Para obtener los parámetros y_{12} y y_{22} , conectamos I_2 al puerto 2 con el puerto 1 en cortocircuito, y encontrando I_1 y V_2 obtenemos:

$$y_{12} = I_1/V_2 \quad y_{22} = I_2/V_2$$

PARÁMETROS H (HÍBRIDOS)



Como no siempre existen los parámetros z e y de un cuadripolo, nuevamente tenemos que desarrollar otros conjuntos de parámetros.

En se basa en convertir a V_1 e I_2 en variables dependientes. Obtenemos las siguientes expresiones:

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

Los parámetros h se llaman *parámetros híbridos* o *parámetros h* .

Los valores de los parámetros se determinan como:

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

Impedancia de entrada en cortocircuito

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

Ganancia directa de corriente en cortocircuito

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

Ganancia inversa de tensión en circuito abierto

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

Admitancia de salida en circuito abierto

El procedimiento para calcular los parámetros h es similar al que utilizamos para los parámetros z o y . Aplicamos una fuente de tensión o corriente el puerto apropiado y se pone en cortocircuito o circuito abierto el otro puerto.

PARÁMETROS G (HÍBRIDO)

Otro conjunto de parámetros híbridos son los g o los *híbridos inversos*. La descripción de las corrientes y tensiones en los terminales queda determinado por las siguientes expresiones:

$$I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2$$

$$V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2$$

Los valores de los parámetros se determinan como:

$$g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2=0}$$

Admitancia de entrada en circuito abierto

$$g_{21} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0}$$

Ganancia directa de corriente en circuito abierto

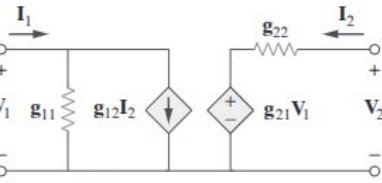


Figura 19.21

Modelo de parámetros g de una red de dos puertos.

$$g_{12} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1=0}$$

Ganancia inversa de corriente en cortocircuito

$$g_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_1=0}$$

Impedancia de salida en cortocircuito

PARÁMETROS DE TRANSMISIÓN

Otro conjunto de parámetros que relaciona las variables en el puerto de entrada con aquellas en el puerto de salida son:

$$V_1 = A V_2 - B I_2$$

$$I_1 = C V_2 - D I_2$$

Esta configuración de parámetros permiten relacionar la forma en la que un circuito transmite la tensión y la corriente de una fuente a una carga, y son bastante útiles en el análisis de líneas de transmisión porque expresan variables del extremo emisor en función de las variables del extremo receptor. De ahí viene el nombre de *parámetros de transmisión*.

Los parámetros reciben el nombre de **ABCD** y se determinan como:

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

Relación de tensión en circuito abierto

$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

$$B = - \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

Impedancia negativa de transferencia en cortocircuito

$$D = - \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

Admitancia de transferencia en circuito abierto

Relación negativa de corrientes en cortocircuito

Los parámetros **A** y **D** son adimensionales, **B** está en ohms y **C** está en siemens.

PARÁMETROS DE TRANSMISIÓN INVERSA

Otro conjunto de parámetros que relaciona las variables en el puerto de entrada con aquellas en el puerto de salida son:

$$V_2 = aV_1 - bI_1$$

$$I_2 = cV_1 - dI_1$$

Los parámetros **abcd** reciben el nombre de *transmisión inversa* o *t* y se determinan como:

$$a = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_1=0}$$

$$b = - \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{V_1=0}$$

Ganancia de tensión en circuito abierto

Impedancia negativa de transferencia en cortocircuito

$$c = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{I_1=0}$$

$$d = - \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_1=0}$$

Admitancia de transferencia en circuito abierto

Ganancia negativa de corriente en cortocircuito

Los parámetros **a** y **d** son adimensionales, **b** está en ohms y **c** está en siemens.

RELACIONES ENTRE PARÁMETROS

Muchas de estas relaciones te sonarán familiares. Simplemente ahora trabajamos en el ámbito matricial. Si existen dos conjuntos de parámetros, es posible relacionar uno con el otro. A continuación te adjunto la tabla de la obra de Sadiku con las conversiones.

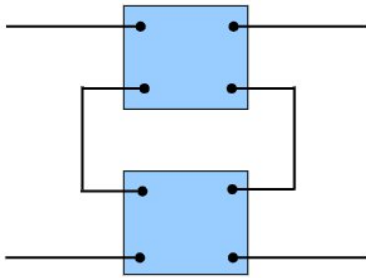
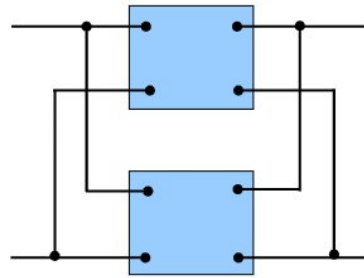
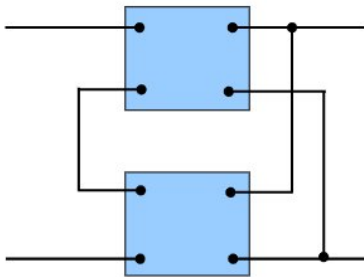
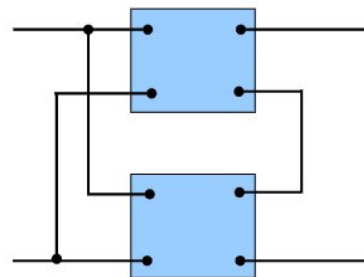
TABLA 19.1 Conversión de parámetros de dos puertos.

	z	y	h	g	T	t
z	z_{11}	$\frac{y_{22}}{\Delta_y}$	$\frac{\Delta_h}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{\Delta_T}{C}$
	z_{21}	$-\frac{y_{21}}{\Delta_y}$	$-\frac{h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{\Delta_T}{C}$
y	$\frac{z_{22}}{\Delta_z}$	y_{11}	$\frac{1}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{22}}$	$\frac{D}{B}$	$-\frac{\Delta_T}{B}$
	$-\frac{z_{21}}{\Delta_z}$	y_{12}	$-\frac{h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{g_{12}}{g_{22}}$	$\frac{1}{B}$	$\frac{A}{B}$
h	$\frac{z_{12}}{\Delta_z}$	y_{21}	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$-\frac{g_{21}}{g_{22}}$	$-\frac{1}{B}$	$-\frac{\Delta_T}{B}$
	$\frac{z_{11}}{\Delta_z}$	$-\frac{y_{12}}{y_{11}}$	h_{12}	$-\frac{g_{12}}{\Delta_g}$	$\frac{B}{D}$	$\frac{\Delta_T}{D}$
	$\frac{z_{22}}{\Delta_z}$	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	h_{21}	$\frac{g_{21}}{\Delta_g}$	$\frac{1}{D}$	$\frac{C}{D}$
	$-\frac{z_{21}}{\Delta_z}$	$\frac{y_{12}}{y_{11}}$	h_{12}	$-\frac{g_{12}}{\Delta_g}$	$-\frac{1}{D}$	$\frac{C}{D}$
g	$\frac{1}{z_{11}}$	$\frac{y_{22}}{\Delta_y}$	$\frac{h_{22}}{\Delta_h}$	g_{11}	$\frac{C}{A}$	$-\frac{\Delta_T}{A}$
	$\frac{1}{z_{21}}$	$-\frac{y_{21}}{\Delta_y}$	$-\frac{h_{21}}{\Delta_h}$	g_{21}	$\frac{1}{A}$	$\frac{B}{A}$
	$\frac{1}{z_{12}}$	$\frac{y_{21}}{\Delta_y}$	$-\frac{h_{21}}{\Delta_h}$	g_{21}	$\frac{1}{A}$	$\frac{B}{A}$
	$\frac{1}{z_{22}}$	$-\frac{y_{12}}{\Delta_y}$	$\frac{h_{22}}{\Delta_h}$	g_{12}	$\frac{1}{A}$	$\frac{B}{A}$
T	$\frac{z_{11}}{\Delta_z}$	$\frac{y_{22}}{\Delta_y}$	$\frac{h_{22}}{\Delta_h}$	$\frac{1}{g_{21}}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{\Delta_T}{C}$
	$\frac{z_{21}}{\Delta_z}$	$-\frac{y_{21}}{\Delta_y}$	$-\frac{h_{21}}{\Delta_h}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{\Delta_T}{C}$
	$\frac{z_{12}}{\Delta_z}$	$\frac{y_{21}}{\Delta_y}$	$-\frac{h_{21}}{\Delta_h}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{\Delta_T}{C}$
	$\frac{z_{22}}{\Delta_z}$	$-\frac{y_{12}}{\Delta_y}$	$\frac{h_{22}}{\Delta_h}$	$\frac{g_{12}}{g_{22}}$	$\frac{D}{\Delta_T}$	$\frac{B}{\Delta_T}$
t	$\frac{1}{z_{12}}$	$\frac{y_{12}}{\Delta_y}$	$\frac{h_{12}}{\Delta_h}$	$\frac{1}{g_{12}}$	$\frac{C}{\Delta_T}$	$\frac{A}{\Delta_T}$
	$\frac{1}{z_{22}}$	$-\frac{y_{21}}{\Delta_y}$	$-\frac{h_{21}}{\Delta_h}$	$\frac{g_{21}}{g_{12}}$	$\frac{D}{\Delta_T}$	$\frac{B}{\Delta_T}$
	$\frac{1}{z_{11}}$	$\frac{y_{22}}{\Delta_y}$	$\frac{h_{22}}{\Delta_h}$	$\frac{g_{11}}{g_{12}}$	$\frac{C}{\Delta_T}$	$\frac{A}{\Delta_T}$
	$\frac{1}{z_{21}}$	$-\frac{y_{21}}{\Delta_y}$	$-\frac{h_{21}}{\Delta_h}$	$\frac{g_{21}}{g_{12}}$	$\frac{D}{\Delta_T}$	$\frac{B}{\Delta_T}$

$$\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}, \quad \Delta_h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}, \quad \Delta_T = AD - BC$$

$$\Delta_y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}, \quad \Delta_g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}, \quad \Delta_t = ad - bc$$

INTERCONEXIÓN DE CUADRIPOLOS

Conexión Serie: Interesan parámetros z Conexión Paralelo: Interesan parámetros y Conexión Serie-Paralelo: Interesan parámetros h Conexión Paralelo-Serie: Interesan parámetros g

La interconexión de cuadripolos nos interesa para dividir una red grande y compleja en una más simple con la que podamos trabajar (una red formada por subredes).

La cuestión es la siguiente. La interconexión puede hacerse en serie, paralelo o en cascada. Si bien hay varios parámetros para caracterizar estos cuadripolos, dependiendo de la interconexión, escogeremos un tipo de parámetro por las ventajas que conllevaría. Por ejemplo, en los cuadripolos en serie, sus parámetros individuales z se suman a los parámetros z de la red mayor. O si están en paralelo, sus parámetros y individuales se suman para obtener los parámetros y de la red mayor. Cuando están en cascada, al multiplicar en conjunto sus parámetros individuales de transmisión obtenemos los de la red amplia.

INTERCONEXIÓN EN SERIE

Decimos que dos cuadripolos están en serie cuando sus corrientes de entrada son las mismas y sus tensiones se suman. Cada cuadripolo tiene una referencia común y al ponerlos en serie, los puntos de referencia común se conectan entre sí.

Las ecuaciones que caracterizan el primer cuadripolo son:

$$V_{1a} = z_{11a} I_{1a} + z_{12a} I_{2a}$$

$$V_{2a} = z_{21a} I_{1a} + z_{22a} I_{2a}$$

Y el segundo:

$$V_{1b} = z_{11b} I_{1b} + z_{12b} I_{2b}$$

$$V_{2b} = z_{21b} I_{1b} + z_{22b} I_{2b}$$

Se aprecia que:

$$I_1 = I_{1a} = I_{1b} \quad I_2 = I_{2a} = I_{2b}$$

Y que:

$$V_1 = V_{1a} + V_{1b} = (z_{11a} + z_{11b}) I_1 + (z_{12a} + z_{12b}) I_2$$

$$V_2 = V_{2a} + V_{2b} = (z_{21a} + z_{21b}) I_1 + (z_{22a} + z_{22b}) I_2$$

Los parámetros z de la red completa son:

$$[z] = [z_a] + [z_b]$$

Es decir:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11a} + z_{11b} & z_{12a} + z_{12b} \\ z_{21a} + z_{21b} & z_{22a} + z_{22b} \end{bmatrix}$$

Si estamos trabajando con parámetros h , usamos la tabla de relaciones y convertimos los h a z , hacemos las operaciones y el resultado final lo convertimos de z a h .

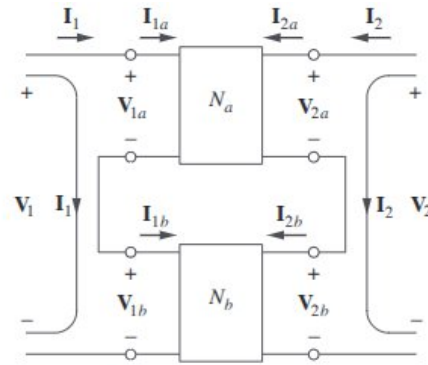


Figura 19.39

Conexión en serie de dos redes de dos puertos.

INTERCONEXIÓN EN PARALELO

Decimos que dos cuadripolos están en paralelo cuando las tensiones en sus puertos son iguales y las corrientes en los puertos de la red más grande son las sumas de las corrientes individuales en los puertos. Cada circuito tiene una referencia común y cuando las redes se conectan entre sí, sus referencias comunes han de estar interconectadas.

Definiremos las corrientes en función de los parámetros y . Al igual que antes, para el primer cuadripolo:

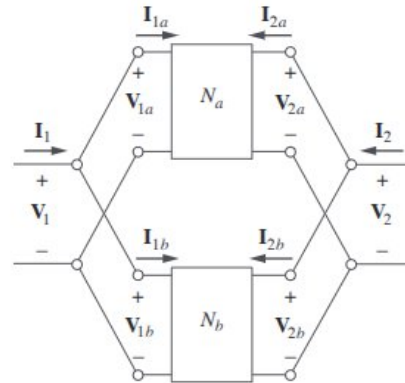


Figura 19.40
Conexión en paralelo de dos redes de dos puertos.

$$I_{1a} = y_{11a} V_{1a} + y_{12a} V_{2a}$$

$$I_{2a} = y_{21a} V_{1a} + y_{22a} V_{2a}$$

Y para el segundo:

$$I_{1b} = y_{11b} V_{1b} + y_{12b} V_{2b}$$

$$I_{2b} = y_{21b} V_{1b} + y_{22b} V_{2b}$$

Como dijimos, se cumple:

$$V_1 = V_{1a} = V_{1b} \quad V_2 = V_{2a} = V_{2b}$$

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b} \quad I_2 = I_{2a} + I_{2b}$$

Despejando I_{1a} , I_{2a} , I_{1b} y I_{2b} en $I_1 = I_{1a} + I_{1b}$ e $I_2 = I_{2a} + I_{2b}$:

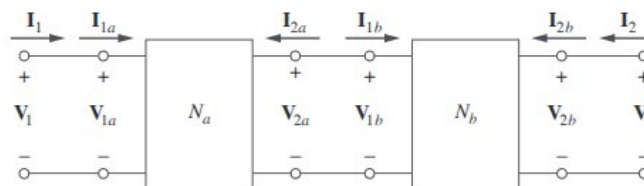
$$I_1 = (y_{11a} + y_{11b}) V_1 + (y_{12a} + y_{12b}) V_2$$

$$I_2 = (y_{21a} + y_{21b}) V_1 + (y_{22a} + y_{22b}) V_2$$

En esencia:

$$[y] = [y_a] + [y_b]$$

INTERCONEXIÓN EN CASCADA



Decimos que dos cuadripolos están en cascada cuando la salida de una es la entrada de la otra. Como dijimos, la caracterización de estas redes interesa hacerlo más con los parámetros de transmisión, por tanto, las ecuaciones que definen las tensiones y corrientes en ambos cuadripolos son:

$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix}$$

Como vemos en la figura, las tensiones cumplen:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Entonces, si definiéramos la ecuación del sistema global:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Y sustituyésemos las igualdades anteriores, obtenemos que:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Es decir, que:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix}$$

Que es lo mismo que:

$$[T] = [T_a] [T_b]$$