

TEMA 4. RÉGIMEN PERMANENTE SINUSOIDAL

Hasta ahora nos hemos centrado en estudiar el comportamiento de los circuitos cuando estos estaban excitados por fuentes constantes o invariables con el tiempo.



En términos históricos, la corriente continua fue el principal medio de suministro de energía eléctrica hasta fines del siglo XIX, cuando se descubriría la corriente alterna, más eficiente y económica para la transmisión a grandes distancias. Es por ello que empezamos aprendiendo la corriente continua y luego la alterna.

En este tema vamos a estudiar los circuitos en condiciones de corriente alterna, excitaciones senoidales (señales con forma de la función seno o coseno) aplicadas un tiempo lo suficientemente largo para que se haya alcanzado el régimen permanente o estacionario.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES: AMPLITUD, FASE, FRECUENCIA, VALOR MEDIO Y VALOR EFICAZ

Una corriente senoidal suele conocerse como corriente alterna, se invierte a intervalos regulares y tiene valores alternadamente positivo y negativo. Los circuitos excitados por estas señales reciben el nombre de *circuitos de ca*.

Consideremos la siguiente tensión senoidal:

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t)$$

Donde V_m es la **amplitud** del senoide, ω la **frecuencia angular** en radianes por segundo, ωt es el **argumento** de la senoide.

Las funciones senoidales (seno y coseno) son periódicas, en este caso, cada T segundos la función senoide se repite, es decir, que cada T segundos el senoide completa un ciclo, una vuelta completa, es decir, 2π rad. Este tiempo recibe el nombre de **periodo**:

$$\omega T = 2\pi \Leftrightarrow T = 2\pi/\omega$$

El recíproco de este *periodo* es la **frecuencia** f , el número de ciclos que hace el senoide en un segundo. Se define como la inversa del periodo:

$$f = 1/T$$

Con estas dos últimas expresiones, obtenemos la siguiente relación:

$$\omega = 2\pi f$$

Tanto ω como f son frecuencias, sin embargo las unidades son distinta: la primera, radianes por segundo (rad/s) y la segunda, el hercio (Hz).

Ahora, vamos a considerar una expresión más general de la senoide:

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

donde $(\omega t + \varphi)$ es el argumento y φ es la **fase inicial** o **de origen**.

Si tenemos dos senoides:

$$v_1(t) = V_m \text{sen}(\omega t)$$

$$v_2(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Si $\varphi \neq 0$, decimos que las señales v_1 y v_2 están **desfasadas**, en caso contrario, están en **fase**. Dicho de otro modo, si la diferencia del argumento de v_1 con v_2 es nula, están en fase.

Finalmente, cabe destacar la siguiente relación entre las funciones seno y coseno, que nos serán de especial utilidad en ciertas ocasiones:

$$v_1 = V_m \cos(\omega t + \varphi) = V_m \sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

Y también las siguientes identidades trigonométricas:

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

Que nos darán las siguientes igualdades:

$$\sin(\omega t \pm 180^\circ) = -\sin \omega t$$

$$\cos(\omega t \pm 180^\circ) = -\cos \omega t$$

$$\sin(\omega t \pm 90^\circ) = \pm \cos \omega t$$

$$\cos(\omega t \pm 90^\circ) = \mp \sin \omega t$$

No obstante, nuestros esfuerzos de analizar circuitos de ca no se limitará simplemente a calcular tensiones y corrientes, también tendremos que realizar

análisis de la potencia, puesto que es la cantidad más relevante en sistemas de suministro de electricidad, electrónicos y de comunicación, porque estos sistemas transmiten potencia de un punto a otro. No entraremos en muchos detalles, pero para la asignatura, nos será relevante saber trabajar con dos parámetros: **valor medio** y **valor eficaz**.

El **valor medio** simplemente se define como el valor que mantiene de forma constante una función periódica durante un ciclo. La expresión general del valor eficaz es la siguiente:

$$\langle v(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) dt$$

Por ello, en condiciones de ca, diremos que el valor medio será nulo: $\langle v(t) \rangle = 0$ (mitad del ciclo sube hasta V_m y en la otra baja hasta $-V_m$).

Por otro lado, la idea de de valor eficaz surge de la necesidad de medir la eficacia de una fuente de tensión o de corriente en el suministro de potencia de una carga.

El **valor eficaz** o **valor rms** de una corriente periódica es la corriente de cd que suministra la misma potencia promedio a una resistencia que la corriente periódica. Su expresión es la siguiente:

$$V_{rms} = \sqrt{\langle [v(t)]^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [v(t)]^2 dt}$$

En las señales senoidales podemos decir que:

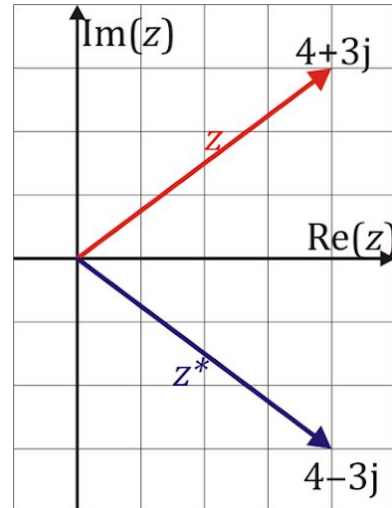
$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t') dt'} = \sqrt{\frac{V_m^2}{T} \int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t')}{2} dt'} \Rightarrow V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

FORMALISMO DE FASORES.

Con lo poco que llevamos de tema ya empezamos a observar que se nos puede complicar bastante las matemáticas si tuviésemos que escribir tantos senos y cosenos. No obstante, hay una forma de trabajar más sencilla con estas funciones periódicas. Se llaman **fasores** y son números complejos que representa la amplitud y la fase de una senoide.

Los números complejos son elementos de un sistema numérico que extiende a los números reales, con un elemento denotado j , denominado como unidad imaginaria y que cumple $j^2 = -1$.

En las matemáticas, formalmente se usa la letra i para denotar dicha unidad, aunque en los textos de ingeniería suele adoptarse el uso de la letra j , ya que la i suele emplearse para referirse a la corriente. Una ventaja del uso de la j en vez de la i es que los símbolos i , j y k se utilizan para referenciar los vectores unitarios en las direcciones de los ejes x , y y z respectivamente. Al referirnos a la unidad imaginaria como j , nos recuerda que esta se mapea sobre el eje vertical (y) en el plano complejo, manteniendo la coherencia con el vector unitario j y facilitando la visualización geométrica de los fasores.



Podemos escribir cualquier número complejo en términos de su parte real e imaginaria:

$$z = x + jy$$

donde x denota la llamada parte real de z , $x = \Re(z)$ e y la parte imaginaria de z , $y = \Im(z)$.

Un número complejo escrito de la forma $z = x + jy$ diremos que está en su forma binómica. Otra forma de representar los números complejos es la llamada forma trigonométrica, por hacer uso del seno y coseno:

$$z = |z| (\cos \alpha + j \sin \alpha)$$

La $|z|$ denota el módulo de z y se calcula como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por otro lado, α es el ángulo que forma el número imaginario con la parte positiva del eje horizontal y se llama argumento de z , el cual se calcula como $\alpha = \tan^{-1}(y/x)$.

Otra forma de escribir un número complejo en términos de su módulo y argumento es la forma polar $|z|_{\alpha}$.

Conocidas las forma de representación y cumpliéndose siempre la siguiente igualdad

$$z = |z| (\cos \alpha + j \sin \alpha) = |z|_{\varphi}$$

vamos a introducir las operaciones aritméticas con complejos:

Dados dos números complejos $z_1 = x_1 + jy_1 = |z_1|_{\varphi_1}$ y $z_2 = x_2 + jy_2 = |z_2|_{\varphi_2}$,

definimos las siguientes operaciones aritméticas.

Suma

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

Resta

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Multiplicación

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2|_{\varphi_1 + \varphi_2}$$

División

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}_{\varphi_1 - \varphi_2}$$

Inverso

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{|z_1|}_{-\varphi_1}$$

Raíz cuadrada

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{|z_1|}_{\frac{\varphi_1}{2}}$$

Conjugado complejo

$$z_1^* = x_1 - jy_1 = |z_1|_{-\varphi} = |z_1| e^{-j\varphi}$$

La idea de la representación fasorial se basa en la identidad de Euler. En general:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

lo que indica que se puede considerar a $\cos \alpha = \Re(e^{j\alpha})$ y $\sin \alpha = \Im(e^{j\alpha})$.

Ahora bien, dado el siguiente senoide:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Podemos expresarla como:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) = \Re(V_m e^{j(\omega t + \varphi)})$$

Es decir,

$$v(t) = \Re(V_m e^{j\varphi} e^{j\omega t})$$

Por tanto,

$$v(t) = \Re(\mathbf{V}e^{j\omega t})$$

donde

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\varphi}$$

Que será la **representación fasorial de la senoide** $v(t)$.

Hay que observar que en la expresión fasorial hemos suprimido la componente temporal o de frecuencia $e^{j\omega t}$, que siempre tendremos que recuperar cuando estemos realizando el cambio del dominio *fasorial* o *frecuencial* al *temporal*. El parámetro ω no se representa en el dominio fasorial porque es constante, aunque la respuesta de la señal dependerá de esta.

Esto implica lo siguiente:

1. Que la expresión $v(t)$ es la representación instantánea o en el *dominio temporal*, mientras que $\mathbf{V}$ es la representación de *frecuencia* o en el dominio *fasorial*.
2. Que $v(t)$ depende del tiempo, mientras que $\mathbf{V}$ no.
3. Y que $v(t)$ siempre será real, mientras que $\mathbf{V}$ suele ser compleja.

Antes de acabar, es relevante especificar las siguientes relaciones:

$$(\text{Dominio temporal}) \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow j\omega \mathbf{V} \text{ (Dominio fasorial)}$$

Y que:

$$(\text{Dominio temporal}) \int v dt \Leftrightarrow \frac{\mathbf{V}}{j\omega} \text{ (Dominio fasorial)}$$

RESPUESTA DE UN CIRCUITO ANTE UNA EXCITACIÓN SENOIDAL

Sabiendo ahora como representar una tensión o corriente en el dominio fasorial (también llamado frecuencial), tenemos que establecer la relación de tensión-corriente del dominio temporal al dominio frecuencial de cada tiempo para los elementos pasivos R, L y C.

RESISTORES

Vamos a empezar con los resistores: si la corriente que circula por el resistor R es $i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$, la tensión a través de esta vendrá dada por la ley de Ohm:

$$v = iR = RI_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Si escribimos la expresión anterior en forma fasorial, sabemos que la expresión fasorial de la corriente será $\mathbf{I} = I_m \varphi$ y la de la tensión será $\mathbf{V} = R\mathbf{I}$. Entonces, la relación tensión-corriente de un resistor sigue siendo la ley de Ohm, como en el dominio del tiempo.

INDUCTORES

En cuanto al inductor L , supongamos que la corriente que circula por este es $i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$. La tensión será:

$$v = L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Con la igualdad trigonométrica de $\cos(\omega t + 90^\circ) = -\sin \omega t$, la expresión de la tensión se reescribe como:

$$v = \omega L I_m \cos(\omega t + \varphi + 90^\circ)$$

Que al transformar en forma fasorial nos da:

$$\mathbf{V} = \omega L I_m e^{j(\varphi+90^\circ)} = \omega L I_m e^j e^{j\varphi} = |\omega L I_m|_{\varphi+90^\circ}$$

Y sabiendo que $\mathbf{I} = I_m \varphi$ y que $e^{j90^\circ} = \cos(90^\circ) + j \sin(90^\circ) = j$, entonces:

$$\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I}$$

Esto implica que la tensión y la corriente están desfasadas 90° , siendo la corriente la que va por detrás.

CONDENSADOR

En cuanto al condensador C , la tensión que la atraviesa es $v = V_m \cos(\omega t + \varphi)$, la corriente será:

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

Aplicando la equivalencia de $dv/dt \Leftrightarrow \mathbf{V}$:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

Esto implica que la tensión y la corriente están desfasadas 90° , siendo la tensión la que va por detrás.

RESUMEN RLC DOMINIO TEMPORAL Y FRECUENCIA

Elemento	Dominio temporal	Dominio frecuencia
Resistor R	$v = Ri$	$V = RI$
Inductor L	$v = L \frac{di}{dt}$	$V = j\omega LI$
Condensador C	$i = C \frac{dv}{dt}$	$V = \frac{I}{j\omega C}$

IMPEDANCIA Y ADMITANCIA

En la sección anterior hemos obtenido las relaciones tensión-corriente de los tres elementos pasivos (como podemos apreciar en la tabla anterior).

Estas ecuaciones pueden escribirse en términos de la proporción entre la tensión y corriente fasorial como:

$$\frac{V}{I} = R \qquad \frac{V}{I} = j\omega L \qquad \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C}$$

De estas expresiones obtenemos la ley de Ohm fasorial:

$$Z = \frac{V}{I}$$

donde Z es una cantidad dependiente de la frecuencia conocida como **impedancia** y se mide en ohms.

Parecido a la resistencia, la impedancia es la oposición que presenta el circuito ante el flujo de la corriente senoidal. Aunque la relación se hace entre fasores, la impedancia no lo es.

Las impedancias de los distintos elementos pasivos se puede obtener con facilidad.

$$Z = R \qquad Z = j\omega L \qquad Z = \frac{1}{j\omega C}$$

Como cantidad compleja, la impedancia la podemos expresar en forma binómica o rectangular como:

$$Z = R + jX$$

donde $R = \Re(Z)$ es la **resistencia** y $X = \Im(Z)$ es la **reactancia** (que puede ser positiva o negativa). Decimos que la impedancia es inductiva cuando la reactancia es positiva y capacitancia cuando es negativa.

Decíamos entonces que $Z = R + jX$ es una impedancia *inductiva* o de retardo – la corriente va por detrás de la tensión – y $Z = R - jX$ es capacitiva o de adelanto – la corriente va por delante de la tensión.

Los condensadores e inductores ideales son elementos reactivos puros.

Los resistores, condensadores e inductores reales tienen tanto componente resistiva como reactiva.

A veces nos puede resultar más cómodo trabajar con la **admitancia**, la inversa de la impedancia, se mide en siemens:

$$Y = Z^{-1} = 1/Z$$

La admitancia la podemos escribir como:

$$Y = G + jB$$

donde $G = \Re(Y)$ es la **conductancia** y $B = \Im(Y)$ la **susceptancia**.

MÉTODOS DE ANÁLISIS Y TEOREMAS EN EL RÉGIMEN SENOIDAL ESTACIONARIO

Para analizar circuitos en el régimen senoidal estacionario, seguimos el siguiente procedimiento:

1. ¿Hay fuentes con diferentes frecuencias? Aplicamos el principio de superposición. Analizamos el circuito para una sola frecuencia a la vez, desactivando (anulando) las fuentes que operen a frecuencias distintas.
2. ¿Hay fuentes con igual frecuencia?: Asignamos un fasor a cada fuente. Podemos fijar la fase de una de ellas en cero como referencia; el resto se definirá según su desfase respecto a esta.
3. Reemplazamos cada componente por su valor de impedancia correspondiente a la frecuencia evaluada. Esto establece una relación lineal y proporcional entre el voltaje y la corriente.
4. Planteamos las ecuaciones que rigen al circuito, las cuales se simplificarán en un sistema de ecuaciones algebraicas.
5. Resolveremos el sistema para determinar los fasores de las variables de salida deseadas.
6. Transformamos los fasores obtenidos de vuelta al dominio del tiempo.
7. Repetimos todo el proceso para cada frecuencia presente en el circuito y, finalmente, sumamos algebraicamente todas las expresiones obtenidas en el dominio del tiempo.

Cuando hayamos llegado a una relación de proporcionalidad entre la tensión que soporta cualquier elemento y la corriente que la atraviesa en el dominio

fasorial, todos los teoremas y métodos que hemos estudiado en condiciones de corriente continua se podrán aplicar.

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA, DIAGRAMA DE BODE



Cuando analizamos circuitos alimentados con señales senoidales, si la amplitud de la fuente senoidal permanece constante y se varía la frecuencia, obtendremos la llamada **respuesta en frecuencia** del circuito, una descripción completa del comportamiento del comportamiento del circuito en función de la frecuencia.

Una herramienta útil para determinar la respuesta en frecuencia de un circuito es la **función de transferencia** $H(\omega)$, una relación entre la entrada $X(\omega)$ (una tensión o corriente de la fuente) y salida fasorial $Y(\omega)$ (una tensión o corriente de elemento) en función de la frecuencia ω .

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

Como la entrada y la salida pueden ser una tensión o una corriente en cualquier parte del circuito, existen cuatro posibles funciones de transferencia:

$$H(\omega) = \text{Ganancia de tensión} = V_o(\omega)/V_i(\omega)$$

$$H(\omega) = \text{Ganancia de corriente} = I_o(\omega)/I_i(\omega)$$

$$H(\omega) = \text{Transferencia de impedancia} = V_o(\omega)/I_i(\omega)$$

$$H(\omega) = \text{Transferencia de admitancia} = I_o(\omega)/V_i(\omega)$$

Los subíndices i y o , respectivamente, son los valores de entrada y salida.

Para obtener la función de transferencia, se obtiene el circuito equivalente en el dominio de la frecuencia del circuito sustituyendo los elementos RLC por sus impedancias complejas, y se usan técnicas de análisis para obtener la función que describe el comportamiento.

La función de transferencia $H(\omega)$ se puede también expresar en término de sus polinomios numerador $N(\omega)$ y denominador $D(\omega)$ como:

$$H(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$$

donde $N(\omega)$ y $D(\omega)$ no son necesariamente las mismas expresiones para las funciones de entrada y salida.

Esta forma de representación asume que los factores comunes del numerador y denominador en $H(\omega)$ se han simplificado, obteniendo la expresión más simple posible.

De esta forma de representación sacamos dos nuevos conceptos: **ceros**, raíces de polinomio del numerador, es un valor que produce un cero en la función, y **polo**, una raíz del polinomio del denominador, un valor que produce que la función sea infinita.

Los ceros suelen representarse como $j\omega = z_1, z_2, \dots$ y los polos como $j\omega = p_1, p_2, \dots$

Para evitar usar álgebra compleja, es decir sufrir, trabajando con las funciones de transferencia $H(\omega)$, podemos reemplazar temporalmente $j\omega$ por s . Cuando hayamos acabado de trabajar con este, revertimos el cambio.

Decimos que hemos obtenido la respuesta en frecuencia de un circuito cuando graficamos en magnitud y fase la función de transferencia conforme varía la frecuencia. Recuerda que $H(\omega)$ es una cantidad compleja: $H(\omega) = H(\omega)_\phi$.

EL DIAGRAMA DE BODE

En ciertas ocasiones no es fácil obtener rápidamente una gráfica de la magnitud y fase de la función de transferencia. Una forma **SISTEMÁTICA** de obtener la respuesta en frecuencia consiste en utilizar los diagramas de Bode.

Según la *Wikipedia*, el “*diagrama de Bode es una representación gráfica que sirve para caracterizar la respuesta en frecuencia de un sistema. Normalmente consta de dos gráficas separadas, una que corresponde con la magnitud de dicha función y otra que corresponde con la fase.*”

Consideramos la función de transferencia $\mathbf{H} = H_\phi = H e^{j\phi}$.

Los diagramas de Bode tienen las siguientes características:

- Se usa una escala logarítmica para el eje de abscisas: se representa el logaritmo decimal (en base 10) de la frecuencia: $\log_{10}(f)$ o $\log_{10}(\omega)$. Su unidad es la “década”. **La década es un intervalo entre dos frecuencias con una relación de 10. Esto es, entre ω_0 y $10\omega_0$ (ej: el intervalo entre 1Hz y 10Hz, o entre 100 Hz y 1kHz).**
- Se representa el módulo H de la función de transferencia en escala logarítmica. Su unidad es el **decibelio**:

- Si la función de transferencia se define como el cociente de señales: $|H(\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |H(\omega)| = 20 \log_{10} \left| \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \right|$.
- Si la función de transferencia se define como el cociente de potencias: $|H(\omega)|_{dB} = 10 \log_{10} \left| \frac{P_{out}}{P_{in}} \right|$.
- Si $|Y/X| < 1$, decimos que se produce una atenuación de la señal.
- Si $|Y/X| = 1$, $|H(\omega)|_{dB} = 0$.
- Si $|Y/X| > 1$, decimos que se produce una amplificación de la señal.
- La fase φ se grafica en grados en función de la frecuencia.

Podemos escribir una función de transferencia en la forma de la ecuación

$$H(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$$

en términos de factores que tienen partes real e imaginaria, siendo una posible representación la **forma estándar**:

$$H(\omega) = \frac{K(j\omega)^{\pm 1} (1 + j\omega/z_1) \left[1 + j2\zeta_1\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2 \right] \cdots}{(1 + j\omega/p_1) \left[1 + j2\zeta_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2 \right] \cdots}$$

Esta expresión se puede obtener resaltando los polos y los ceros en $H(\omega)$.

Consejo: Organiza los términos de tal modo que los factores se encuentren ordenados de menos a más frecuencia.

En este caso particular, $H(\omega)$ puede incluir 7 factores diferentes que pueden aparecer en diversas combinaciones en una función de transferencia:

- Una ganancia K .
- Un polo $(j\omega)^{-1}$ o cero $(j\omega)$ en el origen. **El origen está donde $\omega = 1$ y la ganancia es cero.**
- Un polo simple $1/(1 + j\omega/p_1)$ o cero $1/(1 + j\omega/z_1)$.
- Un polo $1/\left[1 + j2\zeta_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2 \right]$ o cero $1/\left[1 + j2\zeta_1\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2 \right]$ cuadrático. **La diferencia entre la primera y la segunda expresiones se encuentra en ζ_1 y ω_k . La constante ζ se denomina factor de amortiguamiento, pero ese parámetro nos será de utilidad cuando estemos representando el diagrama de Bode a ordenador.**

Cuando hacemos el diagrama de Bode, podemos aprovechar esta **forma estándar** para graficar cada factor por separado y luego a gráficamente. Vamos a aprender a dibujar un diagrama de Bode. ¿Listo?

Es importante denotar que nuestro objetivo será dibujar una aproximación del diagrama de Bode real usando líneas rectas simples.

DIBUJANDO EL DIAGRAMA DE BODE

Vamos a empezar a realizar los diagramas de línea recta de los factores que hemos visto antes:

- **Término constante:** Para la ganancia K , la magnitud es de $20 \log_{10}(K)$ y la fase es de 0° (si K es negativo, la fase será $\pm 180^\circ$), ambas son constantes con la frecuencia.

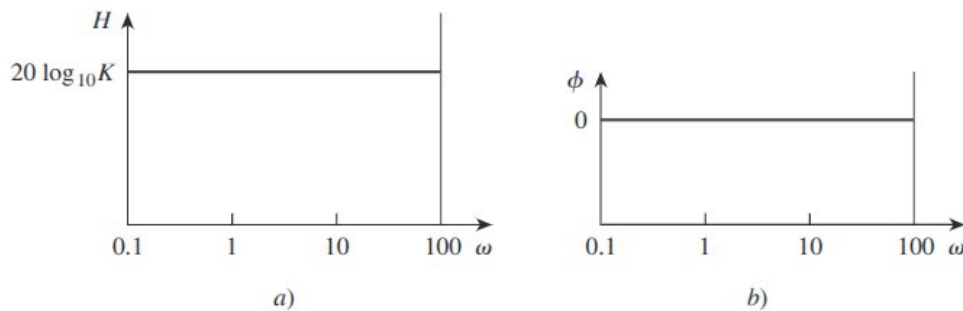
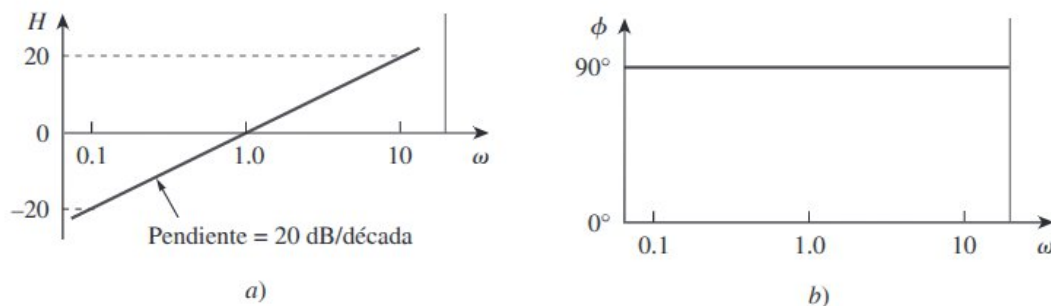


Figura 14.9

Diagrama de Bode para la ganancia K : a) diagrama de magnitud, b) diagrama de fase.

- **Polo $(j\omega)^{-1}$ o cero $(j\omega)$ en el origen:**
 - Para el cero, la magnitud es de $20 \log_{10}(\omega)$ y la fase se corresponde a 90° . A partir de ω , la línea de la gráfica asciende 20 dB/década.
 - Para el polo, la magnitud es de $-20 \log_{10}(\omega)$ y la fase se corresponde a -90° . A partir de ω , la línea de la gráfica desciende 20 dB/década.

Se cumple que para $(j\omega)^N$, donde N es un entero, el diagrama tendrá una pendiente de $20N$ dB/década y la fase $90N$ grados a partir de ω .



- **Polo simple $1/(1 + j\omega/p_1)$ o cero $1/(1 + j\omega/z_1)$:** Para un cero simple, la magnitud es $20 \log_{10} |1 + j\omega/z_1|$ y la fase equivale a $\tan^{-1} \omega/z_1$.

Si $\omega \rightarrow 0$, $H_{dB} = 0$, la magnitud será una línea recta con pendiente cero. En cambio si $\omega \rightarrow \infty$, $H_{dB} = \infty$, que se materializará como una línea recta con pendiente de 20 dB/década.

Llamamos **frecuencia de esquina** o **frecuencia de quiebre** al punto donde las dos líneas asintóticas se intersecan: $\omega = z_1$.

La fase $\tan^{-1} \omega/z_1$. se puede expresar como:

$$\varphi = \tan^{-1}(\omega/z_1) = \begin{cases} 0^\circ & \text{si } \omega = 0 \\ 45^\circ & \text{si } \omega = z_1 \\ 90^\circ & \text{si } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

Y para dibujarla, empezaremos en $\omega = z_1/10$ subiendo $45^\circ/\text{década}$ hasta llegar a $\omega = 10z_1$, donde continuaremos con una línea recta.

Los diagramas de Bode para los polos son similares, pero: la frecuencia de esquina está en $\omega = p_1$, la magnitud tiene una pendiente de -20 dB/década y la fase tiene una pendiente de $-45^\circ/\text{década}$.

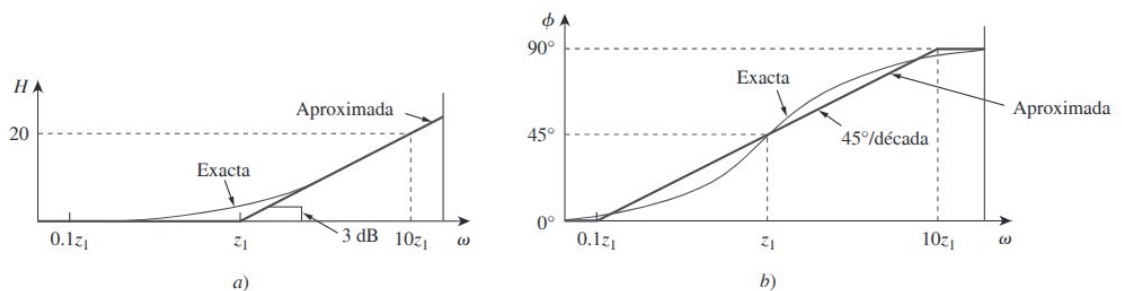


Figura 14.11

Diagramas de Bode del cero ($1 + j\omega/z_1$): a) diagrama de magnitud, b) diagrama de fase.

El diagrama de Bode que nosotros realizamos usamos solo líneas rectas. En la figura 14.11 vemos la gráfica real (exacta) y la aproximada (lo que tenemos que hacer nosotros) del cero simple.

- **Polo** $1/[1 + j2\zeta_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2]$ o **cero** $1/[1 + j2\zeta_1\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2]$
cuadrático: La magnitud del polo cuadrático es

$$-20 \log_{10} [1 + j2\zeta_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2]$$

Si $\omega = 0$, entonces $H_{dB} = 0$. Si $\omega \rightarrow \infty$, entonces $H_{dB} = -40 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_n}$.

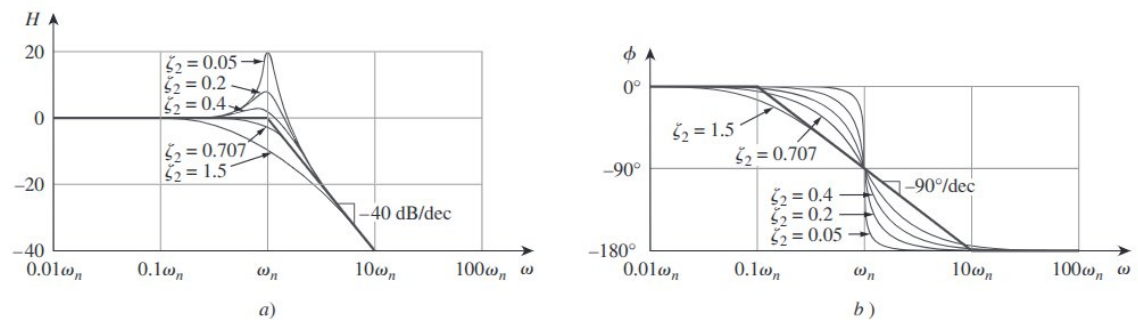
El diagrama estará compuesto por dos líneas rectas asintóticas: cuando $\omega < \omega_n$ la pendiente será 0, y cuando $\omega > \omega_n$ con pendiente -40 dB/década. ω_n Es la frecuencia de equina o quiebre.

La fase es

$$\varphi = -\tan^{-1} \left[\frac{2\zeta_2 \omega / \omega_n}{1 - \omega^2 / \omega_n^2} \right] = \begin{cases} 0^\circ & \text{si } \omega = 0 \\ -90^\circ & \text{si } \omega = \omega_n \\ -180^\circ & \text{si } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

y su diagrama es una recta con una pendiente de -90° por década que empieza en $\omega_n/10$ y termina en $10\omega_n$.

Para el cero cuadrático, las magnitud y fase es al revés, 40 dB/década y 90° por década.



Al final del día, esto se resume en que los ceros provocan que las pendientes aumenten, mientras que los polos hacen lo contrario. Por tanto, cuando dibujamos, partimos desde la frecuencia más baja recorriendo cada punto de interés (cada cero y polo) y vamos aumentando o disminuyendo la pendiente conforme sea necesario siguiendo los criterios que hemos visto.

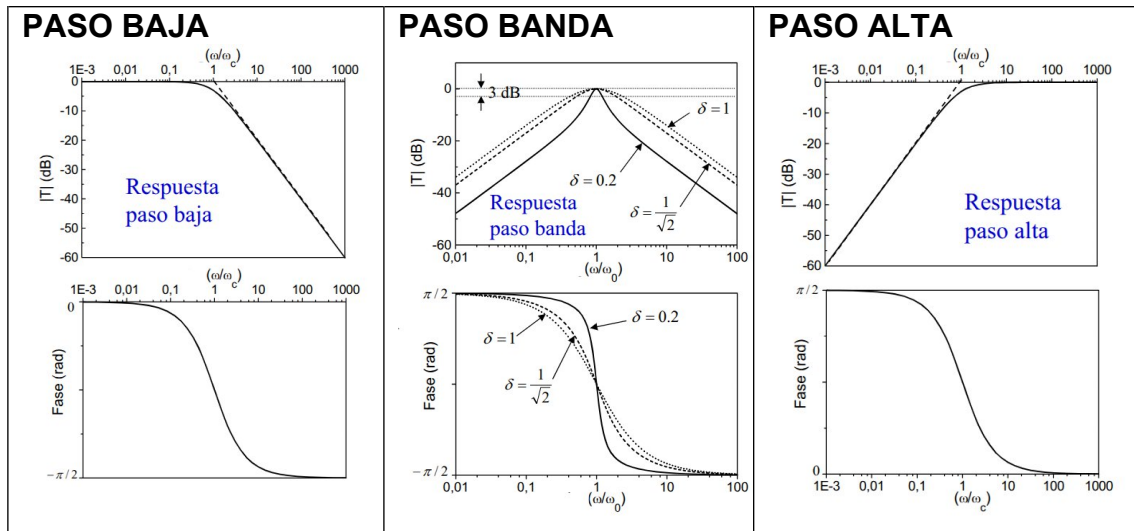
Si bien esto puede parecer un poco lioso al principio, créeme, esto lo dominarás haciendo un par de ejercicios.

RESPUESTAS EN FRECUENCIA IMPORTANTES

Visto el procedimiento para trazar el diagrama de Bode, todo Ingeniero de Teleco debe conocer el diagrama de Bode de las respuestas en frecuencia más básicas:

- La respuesta **paso baja**: el circuito permite el paso de las frecuencias bajas y atenúa las altas.
- La respuesta **paso banda**: el circuito permite el paso de una banda (intervalo) específica de frecuencias y atenúa el resto.
- La respuesta **paso alta**: el circuito permite el paso de las frecuencias altas y atenúa las frecuencias bajas.

Los diagramas de Bode de las respuestas anteriores son las siguientes:



ANÁLISIS DE FOURIER, CONCEPTO DE FILTRO

El Análisis de Fourier “es el estudio de la forma general en que las funciones pueden ser representadas o aproximadas por sumas de funciones trigonométricas simples” según la Wikipedia. Dicho de otro modo, **cualquier señal periódica la podremos descomponer como una suma de funciones senoidales**.

Dada una señal periódica $x(t)$

$$x(t) = \langle x(t) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

A las componentes sinusoidales se les llama **armónicos** de la señal, y al primero de ellos, con frecuencia f_0 igual que la de la señal $x(t)$ se le llama **armónico fundamental**.

La explicación del Análisis de Fourier se realiza en la asignatura de Sistemas Lineales

El **filtro** es un circuito que actúa de forma selectiva sobre las distintas componentes armónicas de una señal, según sea su frecuencia. Puede ser: paso baja, paso alta, paso banda y elimina banda.

POTENCIA EN EL RÉGIMEN SENOIDAL PERMANENTE, POTENCIA ACTIVA Y REACTIVA, FACTOR DE POTENCIA

Ya sabemos desde hace unos temas que la potencia que absorbe un elemento viene dado por la siguiente expresión:

$$p = vi$$

En el régimen senoidal permanente, esta expresión cambia ligeramente:

$$p(t) = v(t)i(t)$$

En esencia, es la misma expresión solo que en vez de usar valores exactos, tenemos funciones. A esta última expresión la denominaremos **potencia instantánea**, se mide en watts y es la potencia en cualquier instante.

Sin embargo, como este cambia continuamente con el tiempo es difícil de medir. Por ello recurrimos a la **potencia promedio o activa**, que es el promedio de la potencia instantánea a lo largo de un periodo:

$$P = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

Si tomamos la tensión $v(t) = V_m \cos(\omega t)$ y la corriente $i(t) = I_m \cos(\omega t - \theta)$, entonces la potencia instantánea será:

$$p(t) = I_m V_m \cos(\omega t) \cos(\omega t - \theta)$$

Sabiendo que $P = \langle p(t) \rangle$, entonces

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{2} I_m V_m \cos \theta$$

porque $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2$ y $\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = 0$.

Por tanto, la potencia promedio resultaría:

$$P = I_{rms} V_{rms} \cos(\theta)$$

donde I_{rms} y V_{rms} son la corriente y tensión eficaz o rms y $\cos \theta$ el **factor de potencia**, el coseno de la diferencia de fase entre la tensión y la corriente, que también es igual al coseno del ángulo de la impedancia de la carga.

El producto de los parámetros I_{rms} y V_{rms} es la llamada **potencia aparente**

$$S = I_{rms} V_{rms}$$

y recibe el nombre porque aparentemente la potencia debería ser el producto voltaje-corriente.

El factor de potencia es también $\cos \theta = P/S$.

Cuando trabajamos con complejos, la potencia aparente queda descrita como:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{V} \mathbf{I}^*$$

En términos de valores rms

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{rms} \mathbf{I}_{rms}^*$$

donde

$$\mathbf{V}_{rms} = \mathbf{V} \sqrt{2} = V_{rms} \theta_v$$

$$\mathbf{I}_{rms} = \mathbf{I} \sqrt{2} = I_{rms} \theta_i$$

La expresión de la **potencia aparente compleja** quedaría como (tomando $\theta = \theta_v - \theta_i$)

$$\mathbf{S} = (V_{rms} I_{rms})_{\theta} = V_{rms} I_{rms} (\cos(\theta) + j \sin(\theta))$$

Con la impedancia $\mathbf{Z}$, que puede escribirse como:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{V} \mathbf{I}_{rms}^* / \mathbf{I}_{rms} = (V_{rms} / I_{rms})_{\theta}$$

Entonces

$$\mathbf{S} = I_{rms}^2 \mathbf{Z} = V_{rms}^2 / \mathbf{Z}^* = \mathbf{V}_{rms} \mathbf{I}_{rms}$$

Como $\mathbf{Z} = R + jX$, entonces:

$$\mathbf{S} = I_{rms}^2 (R + jX) = P + jQ$$

donde P y Q son las partes real e imaginaria de la potencia compleja, es decir:

$$P = \Re(\mathbf{S}) = I_{rms}^2 R = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta)$$

$$Q = \Im(\mathbf{S}) = I_{rms}^2 X = V_{rms} I_{rms} \sin(\theta)$$

P es la **potencia promedio o real** y depende de la resistencia de la carga R , y Q es la **potencia reactiva o en cuadratura** y depende de la reactancia de la carga X .

En nuestros elementos RLC, la potencia será:

- **Resistor:** $\theta = 0$ entonces $P = I_{rms} V_{rms}$ y $Q = 0$.
- **Inductor:** $\theta = \frac{\pi}{2}$ entonces $P = 0$ y $Q = I_{rms} V_{rms}$.

- **Condensador:** $\theta = -\frac{\pi}{2}$ entonces $P = 0$ y $Q = -I_{rms} V_{rms}$.

ACOPLAMIENTO MAGNÉTICO, TRANSFORMADOR LINEAL

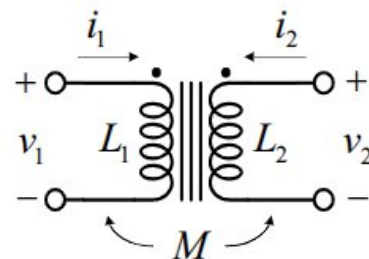
Cuando dos bobinas están en muy próximos entre sí, el flujo magnético causado por la corriente en una bobina se relaciona con la otra bobina, lo que induce tensión en esta última: **inductancia mutua**.

La demostración de las expresiones mostradas en este apartado se encuentran en el tema 13 de la obra de Sadiku. No se incluyen porque solo vemos una pequeña introducción al concepto de transformador lineal.

La inductancia mutua entre dos bobinas está dada por:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

donde k es el coeficiente de acoplamiento (un valor entre 0 y 1).



Si v_1 e i_1 son la tensión y la corriente en la bobina 1, mientras que v_2 e i_2 son la tensión y la corriente en la bobina 2, entonces:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \qquad v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

Es decir, que la tensión inducida en una bobina acoplada es la tensión autoinducida y la tensión mutua.

Los puntitos que hay encima de las bobinas acopladas magnéticamente sirven para indicar la dirección del flujo magnético si entra una corriente en la terminal marcada de la bobina: si los puntitos coinciden, el valor de M será positivo, en caso contrario, negativo.

Un **transformador** es un dispositivo de cuatro terminales que contiene dos o más bobinas acopladas magnéticamente, y se emplea para modificar el nivel de corriente, tensión o impedancia en un circuito.

Las relaciones tensión-corriente de las bobinas primaria y secundaria producen la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Que se traduce en que:

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{V}_2 = j\omega M \mathbf{I}_1 + j\omega L_2 \mathbf{I}_2$$

Decimos que un transformador es **ideal** si:

- Las bobinas tienen reactancias muy grandes ($L_1, L_2, M \rightarrow \infty$).
- El coeficiente de acoplamiento es igual a la unidad ($k = 1$)
- Las bobinas primaria y secundaria no tienen pérdidas ($R_1 = 0 = R_2$)

Jugando con las expresiones anteriores obtendremos un nuevo parámetro característico de este tipo de transformadores. Despejo en la ecuación de $\mathbf{V}_1$ el parámetro de corriente $\mathbf{I}_1$, que luego sustituiré en $\mathbf{V}_2$:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1 - j\omega M \mathbf{I}_2}{j\omega L_1}$$

$$\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 + \frac{M \mathbf{V}_1}{L_1} + \frac{j\omega M^2 \mathbf{I}_2}{L_1}$$

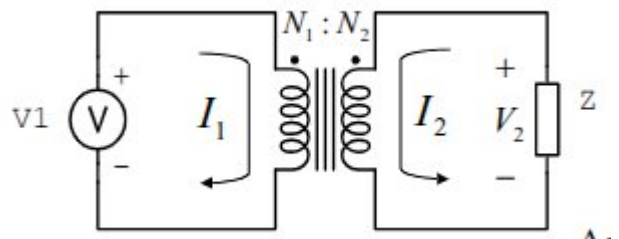
Como $M = \sqrt{L_1 L_2}$ porque $k = 1$, la expresión resulta:

$$\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 + \frac{\sqrt{L_1 L_2} \mathbf{V}_1}{L_1} - \frac{j\omega L_1 L_2 \mathbf{I}_2}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \mathbf{V}_1 = n \mathbf{V}_1$$

donde $n = \sqrt{L_2/L_1}$ y se llama **relación de vueltas**.

Cuando se aplica una tensión senoidal a la bobina primaria, aquella a la que se le suministra energía, con la ley de Faraday, la tensión de dicha bobina será:

$$v_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$



Asimismo la de la segunda será:

$$v_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

Al dividir la primera expresión entre las segundas se obtiene:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

siendo n la **relación de vueltas** que habíamos visto con anterioridad.

Observa que si $\frac{N_2}{N_1} = n$, se cumple que $n^2 = L_2/L_1 = N_2^2/N_1^2$.

Esta expresión también se puede escribir usando las tensiones fasoriales V_1 y V_2 .

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

Por otro lado, cumpliéndose la ley de conservación de la potencia, la energía suministrada a la bobina primaria debe ser igual a la energía absorbida por la otra. Esto implica que:

$$v_1 i_1 = v_2 i_2$$

Por ende, podemos obtener también la **relación de vueltas** como:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

Finalmente, como el transformador es ideal, sabiendo que:

$$V_1 = \frac{V_2}{n}$$

$$V_2 = nV_1$$

$$I_1 = nI_2$$

$$I_2 = \frac{I_1}{n}$$

definimos la impedancia de entrada vista por la fuente que suministra a la bobina primaria como:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{L_1}{L_2} Z = \frac{Z}{n^2}$$