

TEMA 3. ELEMENTOS REACTIVOS. RESPUESTA TRANSITORIA.

ELEMENTOS REACTIVOS

Son elementos en los que no podemos conocer el valor de la corriente en un instante dado el valor de la tensión, sino que tenemos que estudiar su comportamiento en el tiempo. Este concepto lo desarrollaremos en temas posteriores.

CONDENSADORES

Los **condensadores** son elementos pasivos diseñados para **almacenar energía** en su campo eléctrico. Se encuentran formados por dos placas conductoras (como láminas de aluminio) separadas por un aislante o dieléctrico (como aire, cerámica, papel...).

Al conectar una fuente de tensión v al condensador, este deposita una carga positiva q en una placa y una carga negativa $-q$ en la otra.

La cantidad de carga que almacena el condensador es directamente proporcional a la tensión aplicada entre sus bornes, de modo que $q = Cv$, siendo C la constante de proporcionalidad **capacitancia**.

La capacitancia se define como la proporción entre la carga en una placa de un condensador y la diferencia de tensión entre las dos placas, medida en farads (F).

Esta constante depende completamente de las dimensiones y características físicas del condensador: la superficie de las placas (cuanto más grandes, mayor la capacitancia), el espacio entre ellas (cuanto menor, más capacitancia) y la permitividad del material de las placas (cuanto mayor, mayor la capacitancia).

En los condensadores de placas paralelas, la capacitancia está dada por:

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

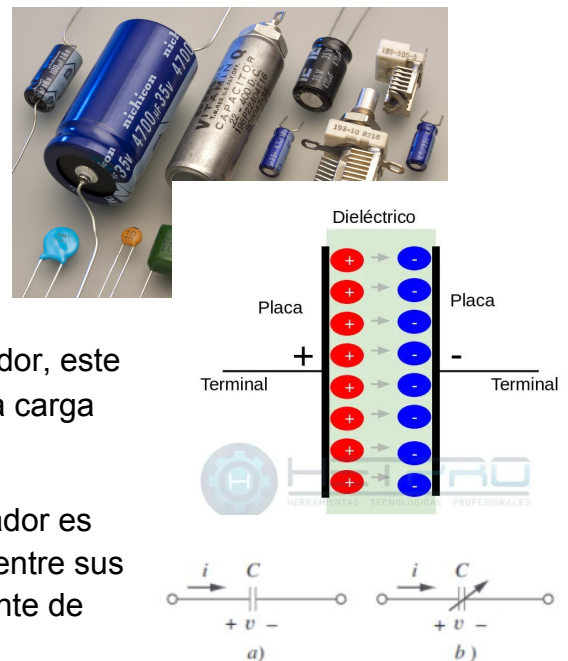


Figura 6.3
Símbolos de circuitos de los capacitores:
a) capacitor fijo, b) capacitor variable.

donde ϵ es la permitividad del material dieléctrico entre las placas, A el área de la superficie de cada placa y d la distancia entre ambas.

Existen varios tipos de condensadores, son descritos por el material dieléctrico que utilizan y por su capacidad (habitualmente en rangos del picofarad al microfarad, aunque también existen condensadores de las magnitudes de faradios, como los que hay instalados en los tranvías del Metropolitano de Granada).

La relación de corriente-tensión la obtenemos con la definición de la corriente (la variación de las cargas en el tiempo):

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

Según la gráfica corriente-tensión, podemos distinguir dos tipos de condensadores: lineales (satisfacen la expresión de antes) y no lineales.

Por otro lado, la relación de tensión-corriente lo podemos obtener despejando v de la anterior expresión:

$$v = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i \, dt + v(t_0)$$

donde $v(t_0) = q(t_0)/C$ es la tensión entre el condensador en el tiempo t_0 . Dicho de otro modo, el condensador recuerda a la tensión que fue cargada. Si lo cargo a 220mV, cuando este empiece a descargarse, lo hará empezando a 220mV hasta llegar a 0V.

La potencia instantánea que suministra el condensador es:

$$p = vi = Cv \frac{dv}{dt}$$

* según la convención de signos pasivos, si $vi > 0$, el condensador está cargándose y en caso contrario, se está descargando.

Y la energía que almacenan viene dado por:

$$w = \frac{1}{2} Cv^2 = \frac{q^2}{2C}$$

En el caso particular de

Finalmente, de los condensadores destacan las siguientes propiedades:

- Cuando la tensión entre los bornes del condensador es constante (invariable con el tiempo, continua), la corriente a través de este es nula.

Por tanto, los condensadores son circuitos abiertos en entornos de corriente continua.

- La tensión en el condensador debe ser continua y no puede cambiar abruptamente, es físicamente imposible, pues sería necesaria la existencia de corriente infinita.
- Los condensadores ideales no disipan energía, la almacenan y la devuelven cuando suministran potencia al circuito. (En Análisis de Circuitos asumimos que siempre son ideales).

CONDENSADORES EN SERIE Y EN PARALELO

En esencia, si tenemos N condensadores en paralelo, la capacitancia total es la suma de las capacitancias individuales.

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N$$

Mientras que si tenemos N condensadores en serie, la capacitancia total es la inversa de la suma de las inversas:

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}}$$

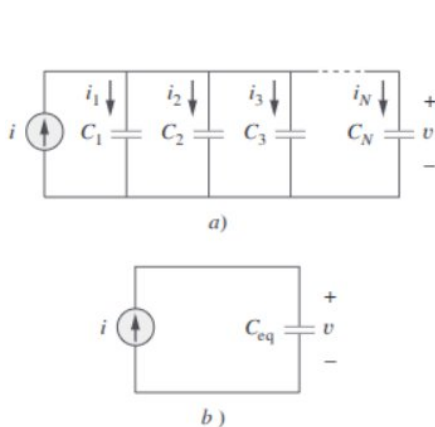


Figura 6.14

a) N capacitores conectados en paralelo,
b) circuito equivalente de los capacitores en paralelo.

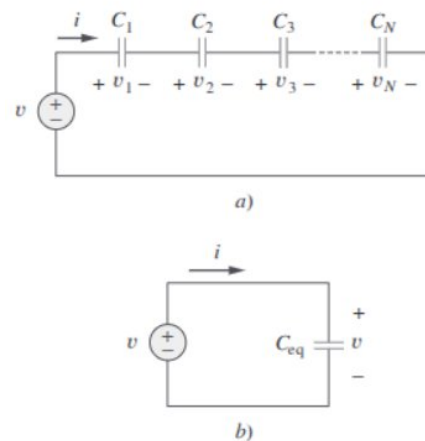


Figura 6.15

a) N capacitores conectados en serie,
b) circuito equivalente de los capacitores en serie.

INDUCTORES.

Hablamos ahora de los inductores, que son elementos pasivos diseñados para almacenar energía en su campo magnético.

Estos los podremos encontrar en transformadores, televisores, radares...



Realmente, los inductores están en todas partes, pues todos los conductores de corriente eléctrica tienen propiedades inductivas y pueden considerarse inductores. Aunque, cuando hablamos de los inductores como tal, nos solemos referir a un conductor continuo enrollado de manera que forma un conjunto de espiras paralelas y próximas entre sí.

Cuando dejamos circular corriente a través de un inductor, el campo magnético que varía en el tiempo crea una fuerza electromotriz (tensión) en el conductor, que tiene una polaridad que se opone al cambio de corriente que la ha creado (leyes de inducción de Faraday y Lenz).

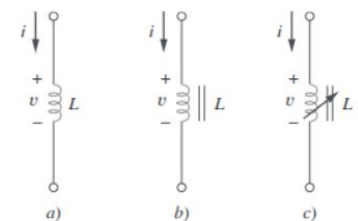


Figura 6.23
Símbolos de circuitos de los inductores:
a) de núcleo de aire, b) núcleo de hierro,
c) variable de núcleo de hierro.

La ratio de oposición al cambio de la corriente que fluye a través de un inductor viene descrita por una constante de proporcionalidad llamada **inductancia**, se mide en henrys (H) y se representa con la letra L . Esta dependerá de las dimensiones y composición física del inductor.

La tensión en el inductor será directamente proporcional a la velocidad con la que cambia la corriente en el tiempo:

$$v = \frac{d\phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

donde ϕ es el flujo magnético y es proporcional a la corriente aplicada: $\phi = Li$.

En el caso particular de las bobinas o solenoides, la inductancia es proporcional al cuadrado del número de espiras $L \propto N^2$:

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}$$

donde μ es la permeabilidad del material que hay en el núcleo (si es el aire, será μ_0), N es el número de vueltas o espiras que tiene la bobina, A el área de la sección transversal y l la longitud del solenoide.

La potencia suministrada al inductor viene determinado por:

$$p = vi = \left(Li \frac{di}{dt} \right) i \frac{di}{dt}$$

Y la energía almacenada es:

$$w = \frac{1}{2} Li^2$$

Finalmente, destacan las siguientes propiedades del inductor:

- La tensión (o f.e.m.) en un inductor es nula cuando la corriente es constante. Para corriente continua, el inductor actúa como un cortocircuito.
- La corriente que circula por un inductor no puede cambiar instantáneamente, es imposible físicamente puesto que sería necesaria una tensión infinita para producirse el cambio.
- El inductor ideal no disipa energía, sino que la almacena y la devuelve posteriormente.

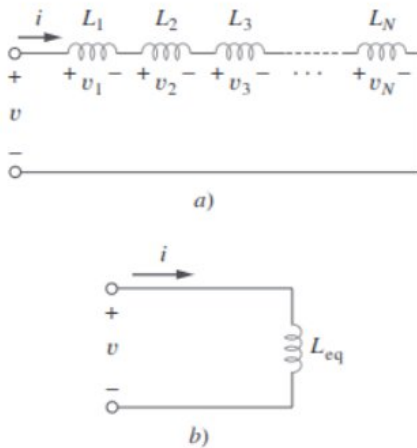
INDUCTORES EN SERIE Y EN PARALELO

En esencia, si tenemos N inductores en serie, la inductancia equivalente será la suma de las inductancias individuales:

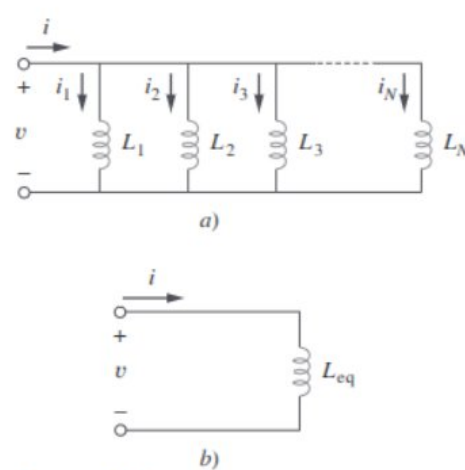
$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_N$$

Por otro lado, si tenemos N inductores en paralelo, la inductancia equivalente será la inversa de la suma inversa de las inductancias individuales:

$$L_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N}}$$


Figura 6.29

a) Conexión en serie de N inductores,
b) circuito equivalente de los inductores en serie.


Figura 6.30

a) Conexión en paralelo de N inductores,
b) circuito equivalente de los inductores en paralelo.

CIRCUITOS CON CONDENSADORES E INDUCTORES EN CONDICIONES DE CORRIENTE CONTINUA

Lo hemos explicado previamente, pero:

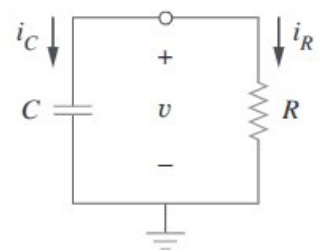
- Condensadores: circuito abierto: $i = C \frac{dv}{dt} \rightarrow v = cte, i = 0$.
- Inductores: cortocircuito: $v = L \frac{di}{dt} \rightarrow i = cte, v = 0$.

ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN RÉGIMEN TRANSITORIO, CARGA Y DESCARGA DE UN CONDENSADOR

Cuando hablamos de condiciones de corriente continua, estamos diciendo que las fuentes externas son constantes y llevan un tiempo suficientemente largo actuando sobre el circuito, de tal modo que, al producirse una conexión o desconexión brusca de las fuentes, se da lugar a una respuesta **transitoria**.

En el caso de los condensadores, este comportamiento transitorio lo veremos a través de los circuitos RC: al ser retiradas las fuentes los condensadores liberan la energía almacenada o si se añaden estas, se producirá el fenómeno contrario..

Para simplificar el análisis, consideramos el siguiente circuito RC sin fuente, el más sencillo, donde el resistor R y condensador C corresponden a la resistencia y capacitancia equivalente de


Figura 7.1

Circuito RC sin fuente.

combinaciones de resistores y capacitadores.

DESCARGA DE UN CONDENSADOR

Suponemos que la tensión a lo largo del capacitor es $v(t)$. Como este está cargado, la tensión inicial es:

$$v(0) = V_0$$

y la energía almacenada es:

$$w(0) = \frac{1}{2}CV_0^2$$

Aplicando LCK al nodo superior del circuito, tenemos que:

$$i_C + i_R = 0$$

Donde la primera es la corriente que atraviesa el condensador y la otra la del resistor. Por definición sabemos que:

$$i_C = C \frac{dv}{dt} \quad i_R = \frac{v}{R}$$

Entonces, la ecuación del nodo superior resulta:

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C} \left(C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} \right) = \frac{1}{C} 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0$$

Hemos multiplicado ambos miembros por $1/C$ y hemos obtenido una ecuación diferencial de primer orden. Reordenamos términos, integramos y obtenemos:

$$v(t) = V_0 e^{-t/RC}$$

De esta expresión entendemos que la respuesta en tensión del circuito RC es una caída exponencial de la tensión inicial. Como esta respuesta depende de la energía inicial almacenada y a las características del circuito y no a una fuente externa, se le llama **respuesta natural** del circuito.

La rapidez con la que decae la tensión se expresa en términos de la **constante de tiempo**, denotada por τ , que es el tiempo requerido para que la respuesta disminuya en un factor de $1/e$ de su valor inicial. Es decir, el tiempo que hace falta para que la tensión haya caído $1/e$ de su valor inicial.

Por tanto, $t = \tau$ y la ecuación de antes se convierte en:

$$v(t) = V_0 e^{-\tau/RC} = V_0 e^{-1} = 0.368 V_0$$

o

$$\tau = RC$$

Reescribiendo la ecuación en términos de la constante de tiempo, nos queda que:

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

Por otro lado, vamos a definir el **tiempo de bajada**, que es el tiempo que transcurre desde que la tensión pasa del 90% al 10% del valor máximo, que respecto a τ es:

$$2.2\tau$$

Ya conociendo la tensión $v(t)$, puedo obtener $i_R(t)$ con la *Ley de Ohm*:

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

Y consecuentemente, puedo obtener la potencia que disipa el resistor:

$$p(t) = v i_R = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau}$$

Y la energía absorbida por el resistor hasta t es:

$$w_R(t) = \int_0^t p(t) dt = \frac{1}{2} C V_0^2 (1 - e^{-2t/\tau}), \tau = RC$$

CARGA DEL CONDENSADOR

Ahora vamos con el proceso de carga del condensador. Definimos V_s como la tensión suministrada por la fuente externa y asumimos que V_0 es la tensión inicial en el capacitor, cumpliéndose:

$$v(0^-) = v(0^+) = V_0$$

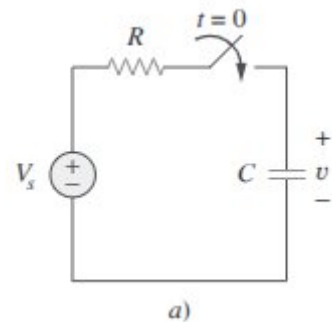
donde $V(0^-)$ es la tensión para el capacitor justo antes de la conmutación y $v(0^+)$ la tensión inmediatamente después de la conmutación.

Al aplicar LCK, obtenemos la siguiente ecuación:

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v - V_s}{R} = 0$$

O lo que es lo mismo:

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = \frac{V_s}{R}$$



Y aplicando las mismas transformaciones que antes obtengo:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{V_s}{RC}$$

Que al reestructurar los términos consigo:

$$\frac{dt}{dt} = -\frac{v - V_s}{RC} \Leftrightarrow \frac{dv}{v - V_s} = -\frac{dt}{RC}$$

Y al integrar ambos miembros e introduciendo las condiciones iniciales consigo:

$$\ln(v - V_s) \Big|_{V_0}^{v(t)} = -\frac{t}{RC} \Big|_0^t \Leftrightarrow \ln(v(t) - V_s) - \ln(V_0 - V_s) = -\frac{t}{RC} + 0$$

Es decir:

$$\ln \frac{v - V_s}{V_0 - V_s} = -\frac{t}{RC} \Leftrightarrow \frac{v - V_s}{V_0 - V_s} = e^{-t/\tau}$$

Con $\tau = RC$.

Por tanto, la función de la tensión quedará como:

$$v(t) = \begin{cases} V_0 & t < 0 \\ V_s + (V_0 - V_s)e^{-t/\tau} & t > 0 \end{cases}$$

Y suponiendo que el condensador está descargado inicialmente, es decir, $V_0 = 0$ obtengo que:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V_s(1 - e^{-t/\tau}) & t > 0 \end{cases}$$

Definimos el **tiempo de subida** como el tiempo que transcurre desde que la tensión pasa del 10% al 90% del valor máximo, que, al igual que el tiempo de bajada, en términos de τ es:

$$2.2\tau$$

En esencia, la clave para trabajar con un circuito RC sin fuente es hallar:

1. La tensión inicial $v(0) = V_0$ a lo largo del capacitor.
2. La constante de tiempo τ .