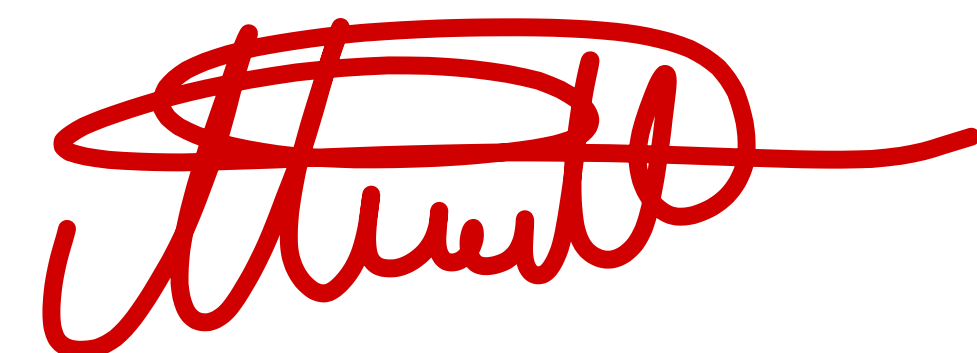


ONDAS PLANAS. Relación de Problemas

1. En una región del espacio con $\epsilon = 9 \epsilon_0$ y $\mu = \mu_0$ se tiene un campo $\mathbf{E}(z,t)$ que posee tres veces más campo eléctrico en componente $\hat{x}$ que en componente $\hat{y}$. Se propaga en dirección $\hat{z}$ con una frecuencia de 10 GHz y una amplitud de 1 $\mu\text{V/m}$. Escribid su expresión.
2. Podría ser el siguiente campo solución de la ecuación de ondas
$$\vec{E}(z,t) = E_0 \hat{x} e^{-(t-z/c)^2}$$
3. En regiones libres de fuente ¿pueden existir campos eléctricos y magnéticos no nulos?
4. Una onda de 3 GHz se propaga en un medio con $\epsilon_r = 4$. ¿Cuál es su longitud de onda? Si de ese medio material pasa al vacío: ¿Cuál será su longitud de onda? ¿y su frecuencia?
5. Una onda plana uniforme polarizada en dirección $\hat{x}$ se propaga en dirección $\hat{y}$ en un medio sin pérdidas con $\epsilon = 4 \epsilon_0$ y $\mu = \mu_0$. La frecuencia de trabajo es 300 MHz y el valor máximo del campo es 1 V/m en $t=T/4$ y $y=\lambda/4$. Escribid la expresión instantánea y fasorial del campo eléctrico $\mathbf{E}$ y campo $\mathbf{H}$.
6. Se superponen una onda polarizada circularmente a derechas con otra onda de igual amplitud polarizada circularmente a izquierdas. ¿Qué polarización posee la onda resultante?
7. En un medio dieléctrico ($\epsilon_r = 4$) con pérdidas que posee una tangente de pérdidas de 0.002, hay un campo de amplitud 200 V/m y frecuencia 1.2 GHz. Calcular la potencia disipada por unidad de volumen.
8. Una onda plana se propaga en un medio con pérdidas midiéndose una amplitud de 1 mV/m en un punto y 0.8 mV/m en un punto que dista 50m. Encontrar la atenuación total entre ambos puntos en nepers y decibelios. Expresad la constante de atenuación α en Np/m y en dB/m.
9. En un medio material una onda plana sufre una pérdida de potencia de 2dB en 20 metros. ¿Qué tanto por ciento de la potencia se pierde en 20 metros? ¿Qué fracción de potencia, (%), se pierde en 10 metros? ¿Cuánto vale α en Neper/m?
10. Los parámetros constitutivos del agua de mar son $\epsilon_r = 72$, $\mu_r = 1$ y $\sigma = 4 \text{ S/m}$. Una onda, emitida desde una antena ubicada en un avión que sobrevuela el océano, incide normalmente desde el aire sobre la superficie del mar. La onda incidente, justo antes de cambiar de medio, posee una amplitud de 200 ($\mu\text{V/m}$), una frecuencia de 500 MHz y está polarizada linealmente. Para la onda transmitida determinar: la constante de atenuación, la constante de fase, la impedancia intrínseca, la longitud de onda y la profundidad de penetración. Calcular la distancia a la cual la amplitud del campo



transmitido es del 1% de su valor inicial. Escribid las expresiones instantáneas del campo eléctrico y magnético a 0.8 m de profundidad.

- 11) Calculad la frecuencia a la cual la profundidad de penetración en el agua de mar es 20m, calculad la longitud de onda correspondiente en el agua de mar y comparadla con la del aire.
- 12) Una onda plana de 30 MHz y amplitud de campo eléctrico de 1V/m incide normalmente desde el aire sobre una capa de un medio material de 100m de espesor con $\epsilon_r = 16$ y $\sigma = 10^{-4}$. Al otro lado del medio de nuevo hay aire y una antena receptora a unos 10m de la interfase. ¿Qué amplitud de campo incide sobre dicha antena?
- 13) Una onda plana incide oblicuamente sobre una superficie de agua con $\epsilon_r = 80$. Determine el ángulo de Brewster para la polarización paralela y el ángulo de transmisión correspondiente. Si la onda incidiese con ángulo de incidencia igual al ángulo de Brewster, calcule los coeficientes de reflexión y transmisión.
- 14) Un radar de efecto Doppler de 1 GHz fijo en tierra se utiliza para determinar la posición y velocidad de un aeroplano que se aproxima. Con un ángulo de elevación de 15 grados sobre la horizontal se recibe una señal con un retraso de 0.3 ms y un cambio de frecuencia de 2.64 KHz. Determine la distancia, altura y velocidad del aeroplano.

Ejercicios Ondas Planas

Almud

Ejercicio 1

$$\epsilon = 9\epsilon_0$$

$$\mu = \mu_0$$

$$f = 10 \text{ GHz} = 10^{10} \text{ Hz} \rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi 10^{10} \text{ rad/s}$$

$$\|E_0\| = 1 \mu \text{ V/m}$$

$$E_{0x} = 3E_{0y}$$

Los datos que me dan

1) Sabemos que una onda plana es de la forma:

$$E(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kr)$$

Como sabemos que se propaga en la dirección z , $r = z$.

Con $f = 10 \text{ GHz}$ puedo sacar la velocidad angular $\omega = 2\pi f = 2\pi 10^{10} \text{ rad/s}$.

Ahora necesito calcular k . Sabemos que toda onda plana verifica

la expresión $\omega \sqrt{\epsilon \mu} = k$, en nuestro caso, $\omega \sqrt{9\epsilon_0 \mu_0} = k \Leftrightarrow$

$3\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = k$. Ahora bien, sabemos que $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ es igual a c , la velocidad de la luz, entonces:

$$3\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = k \Leftrightarrow \frac{3\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \Leftrightarrow \frac{3\omega}{k} = c \Leftrightarrow \boxed{\frac{3\omega}{c} = k}$$

Si consideramos que $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, entonces, $\boxed{k = 200\pi \text{ rad/m}}$.

Por último no hace falta calcular los componentes $\hat{x}$ e $\hat{y}$ del campo eléctrico.

Sabemos que $\|E_0\| = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2 + E_{0z}^2}$. Con $E_{0x} = 3E_{0y}$ tenemos que $\|E_0\| = \sqrt{10E_{0y}^2} = E_{0y} \sqrt{10}$.

$$\text{Con } \|E_0\| = 1 \mu \text{ V/m}, E_{0y} = \frac{\|E_0\|}{\sqrt{10}} = \frac{1 \mu}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \mu \text{ V/m}$$

$$\text{En consecuencia, } E_{0x} = \frac{3}{\sqrt{10}} \mu \text{ V/m}$$

$$\text{Entonces: } E(z,t) = \frac{1}{\sqrt{10}} (3\hat{x} + \hat{y}) \cos(2\pi 10^{10} t - 200\pi z)$$

Ejercicio 2

$$* E_0 \hat{x} e^{-(t-z/c)^2} = \vec{E}(z,t)$$

Adrian

¿Se verifica que $\vec{E}(z,t)$ es sol. de la ec. de ondas?

1) Para resolver este ejercicio haremos uso de la ecuación de ondas en el espacio temporal, es decir:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

⚠️ HAY QUE TENER CUIDADO DERIVANDO!

$\hat{x}$ es un versor, no actúa como incógnita

Comenzamos resolviendo $\nabla^2 \vec{E}$:

* como solo tenemos z como INCÓGNITA: $\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}$

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(E_0 \hat{x} e^{-(t-z/c)^2} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2 E_0 \hat{x} (t - \frac{z}{c}) e^{-(t-z/c)^2}}{c} \right) =$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{4 E_0 \hat{x} (t - \frac{z}{c})^2 e^{-(t-z/c)^2}}{c^2} - \frac{2 E_0 \hat{x} e^{-(t-z/c)^2}}{c^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \left(4 E_0 \hat{x} (t - \frac{z}{c})^2 e^{-(t-z/c)^2} - 2 E_0 \hat{x} e^{-(t-z/c)^2} \right)$$

Ahora resolvemos $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-2 E_0 \hat{x} (t - \frac{z}{c}) e^{-(t-z/c)^2} \right) = 4 E_0 \hat{x} (t - \frac{z}{c})^2 e^{-(t-z/c)^2} - 2 E_0 \hat{x} e^{-(t-z/c)^2}$$

Iguálamos $\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ con los nuevos cálculos:

$$\frac{1}{c^2} \left[4 E_0 \hat{x} (t - \frac{z}{c})^2 e^{-(t-z/c)^2} - 2 E_0 \hat{x} e^{-(t-z/c)^2} \right] = \mu \epsilon \left[4 E_0 \hat{x} (t - \frac{z}{c})^2 e^{-(t-z/c)^2} - 2 E_0 \hat{x} e^{-(t-z/c)^2} \right]$$

y simplificamos:

$$\frac{1}{c^2} = \mu \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\mu \epsilon} = c^2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = c}$$

Como llegamos al final a esta conclusión, decimos que $\vec{E}(z,t)$ SÍ es solución de la ecuación de ondas.

Ejercicio 3

Amulio

La solución es trivial.

Definimos los medios sin fuentes aquellos que cumplen dos características:

* $\rho_v = 0$, es decir, no hay cargas libres,

* $J_v = 0$, no hay corriente libre.

Esto no necesariamente implica que no puedan haber campos E y campos B/H en medios sin fuentes.

La Ley de Faraday nos dice que un campo eléctrico rotacional surge a raíz de la variación de un campo magnético en el tiempo.

Como sabemos ya, la variación de campo B/H produce una fuerza que ejerce en los electrones del entorno, la llamada fuerza electromotriz. Dicha fuerza provoca el movimiento de los ceros en el medio produciendo un campo eléctrico E .

Ahora bien, también sabemos que cualquier microvariación de un campo E producirá un campo B rotacional.

Esto nos lo especifica la ley de Ampère-Maxwell.

La f.e.m. produce corriente, que a su vez produce un campo B .

De esta forma, los campos E y B rotacionales se retroalimentan, permitiendo que existan en medios sin fuentes.

Ejercicio 4

Handwritten signature

* MEDIO 1

$$\epsilon_r = 4$$

$$f = 3 \text{ GHz}$$

MEDIO 2

$$\epsilon_r = 1$$

$$f = 3 \text{ GHz}$$

/ Asumo $\mu = \mu_0$!

¿ λ ?

1) Para calcular la longitud de onda apelamos a la expresión $\lambda = \frac{v_p}{f}$.

Conocemos $f = 3 \cdot 10^9 \text{ Hz}$, pero no v_p .

Para calcular v_p usaremos la siguiente expresión general:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad \text{¡ me lo dan! }$$

↓
Asumimos $\mu = \mu_0$ y $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 = 4\epsilon_0$.

Entonces,

$$v_{p1} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{2} c = v_{p1}$$

$$\text{Con esto, } \lambda_1 = \frac{v_{p1}}{f} = 0.105 \text{ m}$$

$$2) \text{ En el medio 2, } v_{p2} = c, \text{ entonces } \lambda_2 = \frac{v_{p2}}{f} = 0.1 \text{ m}$$

Solución: λ en el medio 1 = 0.105 m y en el vacío = 0.1 m.

Ejercicio 5

* Polarizado en $+\hat{x}$ * $E_0 = 1 \text{ V/m}$

* Propaga en $+\hat{y}$

* $\epsilon = 4\epsilon_0$ / $\mu = \mu_0$

* $f = 300 \text{ MHz} = 3 \cdot 10^8 \text{ Hz}$

Piden E en fasorial e instantánea

Piden H en fasorial e instantánea

Expresión base de un campo E polarizado en $+\hat{x}$ que se prop. en $+\hat{y}$:

$$\boxed{\bar{E}(y) = \hat{x} E_0 e^{-jk_y y}} \cdot e^{j\phi_0}$$

↑
si hay desfase.

1) CAMPO E .

Necesito saber los siguientes valores:

$$* \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{\frac{1}{2}c}{f} = \frac{c}{2f} = \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^8} = \frac{1}{2} = \boxed{0.5 \text{ m} = \lambda}$$

$$* v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{6\pi \cdot 10^8}{12\pi \cdot 10^8 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \boxed{\frac{1}{2}c = v_p}$$

$$* k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = 6\pi \cdot 10^8 \cdot \sqrt{4\epsilon_0 \mu_0} = \boxed{12\pi \cdot 10^8 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = k} = \frac{12\pi \cdot 10^8}{3\pi \cdot 10^8} = \boxed{k = 4\pi}$$

$$* \omega = 2\pi f = \boxed{6\pi \cdot 10^8 = \omega}$$

$$\text{Con eso: } \bar{E}(y) = \hat{x} e^{-j12\pi \cdot 10^8 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} y} = \hat{x} e^{-j4\pi y} \dots$$

¿tiene desfase?

Sabemos que $\bar{E}(y) = 1 \text{ V/m}$ cuando $t = T/4$ y $\phi = \frac{\lambda}{4}$.

Pasamos de notación fasorial a instantánea, contemplando el desfase:

$$\bar{E}(y) \rightarrow \hat{x} E_0 e^{+j(\omega t - k y + \phi_0)} = \hat{x} \cos(\omega t - 4\pi y + \phi_0).$$

$$T/4 = \frac{\frac{1}{f}}{4} = \frac{1}{4f} = \boxed{\frac{1}{12 \cdot 10^8} = T/4} = t.$$

$$\lambda/4 = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \boxed{\frac{1}{8} = \lambda/4} = y$$

Sustituyo en la expresión:

$$1 = 1 \hat{x} \cos\left(\frac{6\pi \cdot 10^8}{12 \cdot 10^8} - \frac{4\pi}{8} + \phi_0\right) \Leftrightarrow 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \phi_0\right) \Leftrightarrow$$

$$\arccos(1) = 0 + \phi_0 \Leftrightarrow 0 = \phi_0 \rightarrow \text{no hay desfase.}$$

Con toda esa info, $\vec{E}$ en formalismo fasorial es:

$$\vec{E}(y) = \hat{x} e^{-j4\pi y}$$

o en expresión instantánea:

$$\vec{E}(y,t) = \hat{x} \cos(6\pi 10^8 t - 4\pi y)$$

2) Para calcular el campo magnético H , usamos la relación entre E_0 y H_0 con la impedancia intrínseca.

Sabemos que $\eta = \frac{|E_0|}{|H_0|} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \Rightarrow$ sustituyo con mis datos:

$$\eta = \frac{1}{|H_0|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\epsilon_0}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx \frac{1}{2} \cdot 377 \Omega = \eta.$$
$$\uparrow$$
$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega$$

$$\text{entonces: } |H_0| = \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \approx \frac{1}{188.5 \Omega}.$$

La expresión de campo resulta como:

$$H(y) = \hat{z} \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} e^{-j4\pi y}.$$

Habrás observado que te dejado " $\hat{z}$ ". Nos hace falta saber en que dirección se propaga.

Usando la regla de Poynting, que nos da el vector paralelo a la (velocidad de prop) dirección de propagación: $P \parallel E \times H$, saco que

H se propaga en $+\hat{z}$.

Finalmente:

$$H(y) = \hat{z} \frac{2}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} e^{-j4\pi y}$$

o en expresión instantánea:

$$H(y,t) = \hat{z} \frac{2}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \cos(6\pi 10^8 t - 4\pi y)$$

□

Ejercicio 6

[Signature]

Definimos una onda polarizada circularmente a derechas: (OPCD)

$$\vec{E}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x - ja_y) E_0 e^{-jkz}$$

y a izquierdas: (OPCI)

$$\vec{E}_I = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x + ja_y) E_0 e^{-jkz}$$

⚡ Estas ecuaciones vienen del libro de EMF de Daniel S. Elliot pág 347

$$a_x = \hat{x} \quad y \quad a_y = \hat{y}$$

La superposición implica que $\vec{E}_T = \vec{E}_R + \vec{E}_I =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x - ja_y) E_0 e^{-jkz} + \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x + ja_y) E_0 e^{-jkz} =$$

$$= \sqrt{2} E_0 a_x e^{-jkz} = \boxed{\sqrt{2} E_0 \hat{x} e^{-jkz} = \vec{E}_T}$$

$\uparrow$
 $a_x = \hat{x}$

Como vemos, $\vec{E}_T$ se propaga linealmente en el eje $\hat{x}$!

Luego, si superponemos una OPCD y OPCI, el resultado será una onda polarizada linealmente.

Ejercicio 7

AD

* nos piden la potencia disipada por ud. de volumen.

☺ En clase nos comentan en que el objetivo de este problema es centrarse en el cálculo de la potencia (~~disipada~~) por unidad de área. Resolveremos el ejercicio de ambas formas.

RESOLUCIÓN 1 - POTENCIA DISIPADA POR UD. VOLUMEN

$$* \tan \delta = 0.002$$

$$* f = 1.2 \text{ GHz} \rightarrow \omega = 2\pi (1.2 \cdot 10^9) \text{ Hz}$$

$$* \epsilon_r = 4 \rightarrow \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = 4\epsilon_0$$

$$* |\epsilon| = 200 \text{ V/m}$$

Sabemos que la tangente de pérdidas es: $\tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ y que la potencia disipada por unidad de volumen viene dada por la siguiente expresión: $P_d = \frac{1}{2} \sigma |\epsilon|^2$.

De la tangente de pérdidas despejo σ : $\sigma = \tan \delta \cdot \omega \cdot \epsilon$ y sustituyo en P_d :

$$P_d = \frac{1}{2} \tan \delta \omega \epsilon |\epsilon|^2 \rightarrow \text{sustituyo valores y me queda:}$$

$$P_d = \frac{1}{2} 0.002 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1.2 \cdot 10^9 \cdot 4\epsilon_0 \cdot 200^2 = 3.84 \cdot 10^{11} \cdot \pi \epsilon_0 \text{ W/m}^3$$

$$\text{Considerando } \pi = 3.14 \text{ y } \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m, } \boxed{P_d \approx 10.678 \text{ W/m}^3}$$

$$\text{☺ Si usamos } \pi \text{ de la calculadora } \boxed{P_d \approx 10.681 \text{ W/m}^3}$$

RESOLUCIÓN 2 - POTENCIA POR UD. DE ÁREA

Para calcularlo haremos uso del Vector de Poynting, que mide el flujo de potencia a través de un área:

$$P_a = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta} |\epsilon_0|^2$$

* promediado

Normalmente, al trabajar en medios con pérdidas, usamos la impedancia intrínseca compleja. Pero como regla de oro, si la $\tan \delta$ (tangente de pérdidas) < 0.1 , podemos asumir que el material es un buen dieléctrico y decir que $n \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0}}$.

Como $\tan \delta = 0.002 < 0.1$, entonces:

* Asumimos que $\mu = \mu_0$. Con $\epsilon = 4\epsilon_0$, $\boxed{n \approx 188.5 \Omega}$.

Con $E_0 = 200 \text{ V/m}$,

$$P_a = \frac{1}{2} \frac{1}{n} |E_0|^2 \approx 106.104 \text{ W/m}^2.$$

Ejercicio 8

Por norma general, el campo eléctrico de una onda que se propaga puede escribirse como:

$$\vec{E}(z) = \hat{x} E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

* véase que como que se propaga la onda en $+z$ y el campo apunta en la dirección $\hat{x}$.

⊗ es la cte. de atenuación y β es la cte. de fase.

En el problema no necesitamos la parte relativa con la fase, así que la omitiremos. Nos centraremos en lo que nos pide, la cte. de atenuación ⊗:

A partir de los datos:

$$* |E_0| = 1 \text{ mV/m}$$

$$* \bar{E}(50\text{m}) = 0.8 \text{ mV/m}$$

¿ valor cte α ?
en Np/m y dB/m.

Con los datos:

$$0.8 = e^{-\alpha \cdot 50} \text{ y despejo } \alpha \text{ usando la definición de log:}$$

$$\log_e 0.8 = -\alpha \cdot 50 \quad \text{ó} \quad \ln 0.8 = -50\alpha \rightarrow \boxed{\alpha = 4.463 \cdot 10^{-3} \text{ Np/m}}$$

$$\rightarrow \text{Solución: } \boxed{\alpha = 4.463 \cdot 10^{-3} \text{ Np/m}}$$

Seguimos con las operaciones. Necesitamos pasar de Np/m a dB/m:

Según la ITU (International Telecommunication Union),

$$1 \text{ Np} \approx 8.686 \text{ dB}$$

$$\text{Con una simple regla de tres... } \boxed{\alpha_{\text{dB}} \approx 0.0387 \approx 0.039 \text{ dB/m}}$$

→ solución ↗

Ahora tenemos que calcular la atenuación total:

~~Solución~~

$$\text{Si } \alpha = 4.463 \cdot 10^{-3} \text{ Np/m, en } 50\text{m} \text{ será } 50\alpha = 0.223 \text{ Np/m}$$

$$\rightarrow 1.937 \text{ dB} \leftarrow \text{Solución}$$

$$\boxed{2.024 \text{ dB/m}}$$

Ejercicio 9

AD

Para recuperar fuerza, este ejercicio es genl. Solo tendremos que usar fórmulas del "Tema 0. Herramientas Matemáticas".

* 2dB en 20 metros.

* ¿% de potencia perdido?

* ¿% de potencia perdida en 10 metros?

* ¿x en Np/m?

W

la pérdida de potencia no es lineal.

W

"Herramientas Matemáticas" disponible en PRADO! Recomendable revisar.

1) % potencia perdida en 20 metros:

Sabemos que las pérdidas en potencias vienen dadas por la siguiente relación:

$$10 \log\left(\frac{P_i}{P_f}\right)$$

Con nuestros datos: $2\text{dB} = 10 \log\left(\frac{P_i}{P_f}\right) \Leftrightarrow 0.2 = \log\left(\frac{P_i}{P_f}\right) \Leftrightarrow$

$$10^{0.2} = \frac{P_i}{P_f} \Leftrightarrow 1.585 = \frac{P_i}{P_f} \rightarrow \frac{1}{1.585} = \frac{P_f}{P_i} = \underline{\underline{0.6309}}$$

Se conserva un 63.09% de la potencia original. Entonces, la potencia perdida será 36.91%.

2) ¿% en 10 metros?

Necesitamos cuanto dB se han perdido en 10 metros. Para ello hacemos una regla de 3:

$$\begin{array}{l} 2\text{dB} \text{ --- } 20\text{m} \\ x \text{ --- } 10\text{m} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = 1\text{dB} \end{array} \right.$$

Repetimos el proceso del anterior apartado para calcular el % de pérdidas, obteniendo: 20.57%.

3) ¿x en Np/m?

Sabemos que $x_{\text{dB}} = \frac{2\text{dB}}{20\text{m}} = 0.1\text{dB/m}$.

Según la ITV $1\text{Np} \cong 8.686\text{dB}$, $0.1\text{dB/m} \cong \underline{\underline{0.0115\text{Np/m}}}$

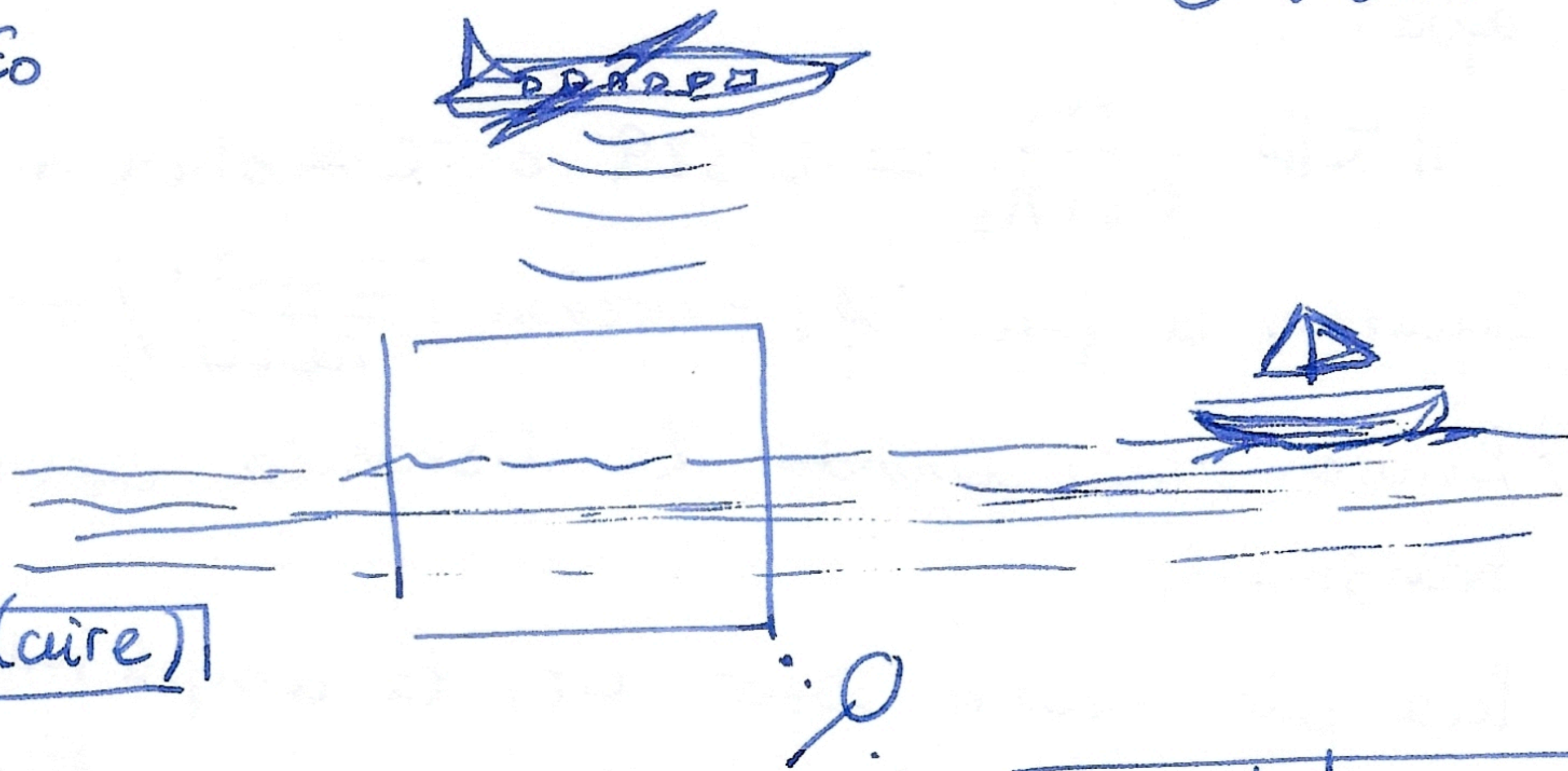
Ejercicio 10

Amor

$$* \epsilon_r = 72 \rightarrow \epsilon = 72\epsilon_0$$

$$* \mu_r = 1 \rightarrow \mu = \mu_0$$

$$* \sigma = 4 \text{ S/m}$$



Prop. onda medio 1 (aire)

$$|E_0| = 200 \mu\text{V/m}$$

$$f = 500 \text{ MHz} = 5 \cdot 10^8 \text{ Hz}$$

* Polarizado linealmente

PROP ONDA MEDIO 2 (AGUA)

La frecuencia es la misma, cambiará seguramente la amplitud, λ y otros parámetros.

	fondo
AIRE	↓ ↓ ↓ ↓
MAR	¿? ¿?

Me piden: α, β, n (asumimos la del mar?), λ , profundidad de penetración, distancia en el cual E_T es 1% ~~transmisión~~ incidente y expresiones instantáneas del campo E y H a 0.8 metros profundidad.

1) Necesito descubrir si el agua es un buen dieléctrico o conductor, para ello, uso la $\tan \delta$:

$$\tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \approx 2$$

Como $\tan \delta > 1$, asumimos el agua como un buen conductor:

$$\text{Por eso, para calcular } \alpha \text{ y } \beta \Rightarrow \alpha = \beta = \sqrt{\mu f \pi \sigma} = 88.857 \text{ rad/m}$$

$$2) \text{ La longitud de onda la calculamos con la relación } \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 0.071 \text{ m}$$

$$3) \text{ La profundidad de penetración como } \delta_p = \frac{1}{\alpha} = 0.011 \text{ m}$$

$$4) \text{ Calculamos } n \text{ del mar: } \|n_2\| = \sqrt{\frac{\mu f \pi}{\sigma} (1+j)} = 125.66 \text{ } \Omega$$

5) Calculo τ para sacar la amplitud de la onda transmitida al agua:

$$\|\tau\| = \frac{2n_2}{n_2 + n_1} = 0.529 \text{ o } \tau \approx 0.44 + j0.30.$$

Sacamos la fase: $\phi_\tau = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\tau)}{\text{Re}(\tau)}\right) = 0.59 \text{ rad.}$

6) Ahora busco ~~cuando~~ la distancia cuando E_z es 1% la transmitida:

Para ello necesito saber E_z , la amplitud transmitida.

Usando el coef. de transmisión $\tau = \frac{\|E_z\|}{\|E_i\|} \Leftrightarrow \tau\|E_i\| = E_z$

$$E_z = 106 \mu\text{V/m.}$$

Ahora, usando la expresión de campo eléctrico en términos de α y β :

$\tilde{E}_z(z) = |E_z| e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$, quitando la parte relativa a la fase:

$\hat{E}_z(z) = |E_z| e^{-\alpha z}$ nos quedamos con lo necesario para

$$\text{buscar } 0.01 \|E_z\| = \|E_z\| e^{-88.567z} \Leftrightarrow z = -\frac{\ln(0.01)}{88.5672} \approx 0.052 \text{ m.}$$

7) Construimos las expresiones instantáneas:

$$E(z,t) = |E_z| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi_r) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{sustituyo} \end{matrix}$$

$$E(z,t) = 106 e^{-88.857z} \cos(1 \cdot 10^9 t - 88.857z + 0.59) \hat{x} \text{ y}$$

a 0.8 m profundidad:

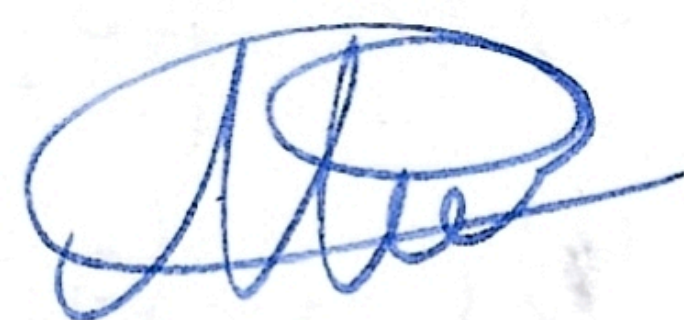
$$E(z=0.8 \text{ m}, t) = 106 e^{-88.857 \cdot 0.8} \cos(10^9 t - 88.857 \cdot 0.8 + 0.59) =$$
$$106 e^{-71.086} \cos(10^9 t - 71.086 + 0.59).$$

Para sacar el campo magnético:

$$H(z,t) = \frac{|E_z|}{\eta_2} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi_{\text{total}})$$

$$\phi_{\text{total}} = \phi_\tau - \phi_\eta = 0.59 \text{ rad} - \arctan\left(\frac{\text{Im}(\eta_2)}{\text{Re}(\eta_2)}\right) = -0.195 \text{ rad.}$$

y sustituir y fin.



Ejercicio 11

f la despejo de $\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon \omega}}$ (*prof. de penetración)

$$\delta = 20 \text{ m} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon \omega}} \Rightarrow \underbrace{\mu_r = 1 \quad \epsilon_r = 4 \text{ S/m}}_{\text{Datos ej. anterior}}$$

tengo que $f = \frac{1}{\pi \mu \epsilon \delta^2} \Rightarrow$ substituyo en la calculadora y...

$$\mu = \mu_r \mu_0 = \mu_0$$

$f = 158,3 \text{ Hz}$

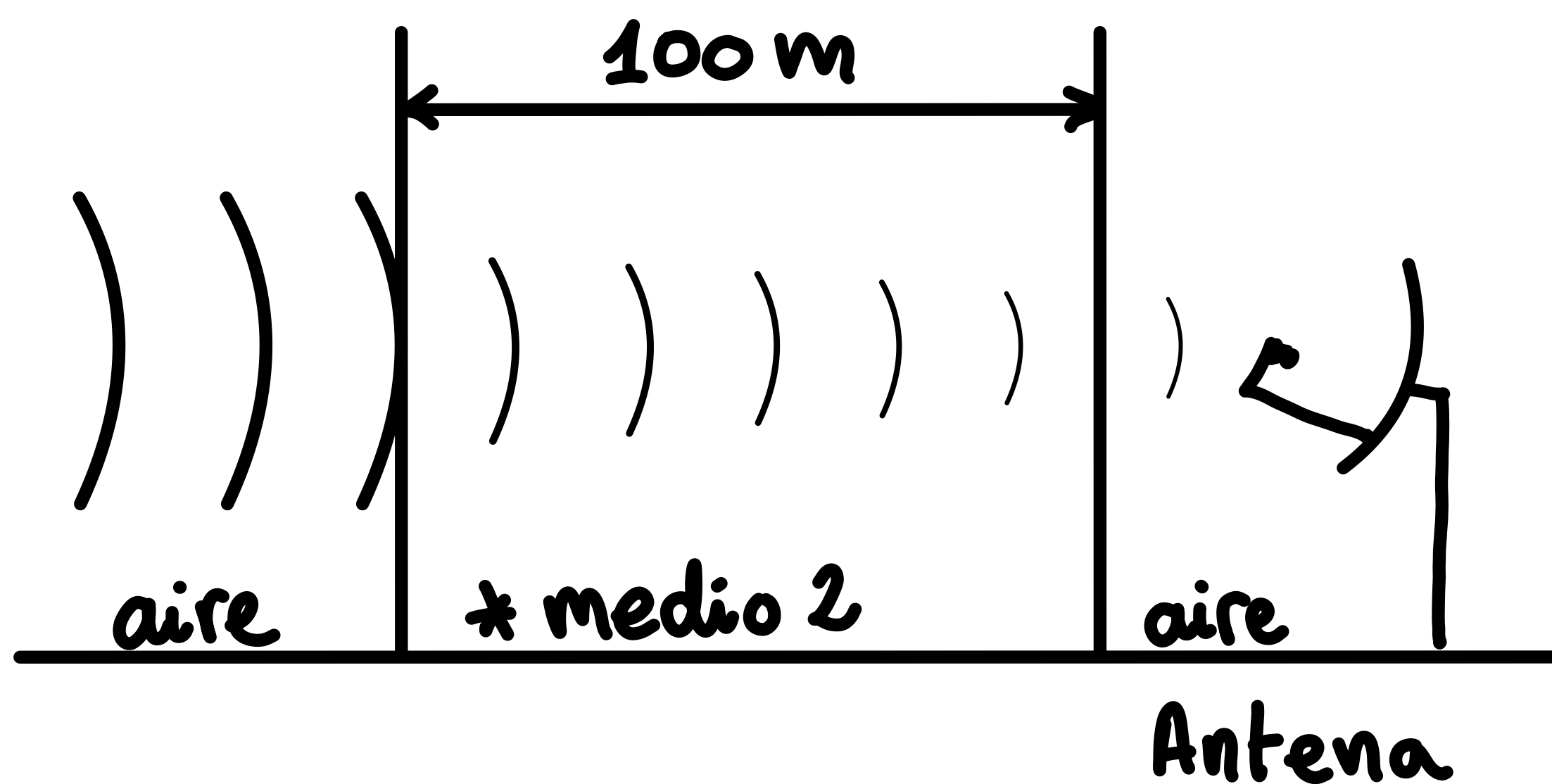
Atun

Ejercicio 12

Onda plana $f = 30 \text{ MHz}$
 $E_0 = 1 \text{ V/m}$

Medio 2: $\epsilon_r = 16$

$$\sigma = 10^{-4}$$



Calcular amplitud onda que incide en la antena

1) Busco calcular la E_T (Amplitud Transmitida)

$$\tau_{1 \rightarrow 2} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{E_T}{E_i} \quad (\text{coef. transmisión m.1 a m.2})$$

• CALULO LA TAN. PÉRDIDAS $\tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} = 0'003$ y η_2 :

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left[1 + \frac{j\epsilon''}{\epsilon'} \right] \Rightarrow \text{con } \tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \text{ tengo que } \epsilon' \tan \delta = \epsilon'':$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left[1 + j \frac{\cancel{\epsilon'} \tan \delta}{\cancel{\epsilon'}} \right] = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} [1 + j \tan \delta] \Rightarrow \text{con } \epsilon'$$

representando la permitividad ($\epsilon' = \epsilon_r \epsilon_0$) tengo que

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{16 \epsilon_0}} [1 + j \tan \delta] = 94,183 (1 + j \tan \delta) =$$

$$\eta_2 = (94,183 - j0'283) \Omega$$

• calulo τ , con $\eta_1 \approx 377 \Omega$ (aire) y para facilitar operaciones
calulo $|\eta_2| = 94,183 \Omega$

$$\tau_{1 \rightarrow 2} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 0'3997 \approx 0'400$$

$$\text{con } \tau_{1 \rightarrow 2} = 0'400 \Rightarrow \tau = \frac{E_T}{E_I} \Leftrightarrow E_I \cdot \tau = E_T = 0'400 \text{ V/m}$$

2) El medio 2 es con pérdidas, necesito saber el factor de atenuación en la onda para poder calcular la $\tau_{2 \rightarrow 1}$

• como $\tan \delta \ll 1$, el material es dieléctrico, entonces

$$\alpha = \frac{\omega \epsilon''}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}$$

• donde $\tan \delta = 0.003 = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \Rightarrow \epsilon'' = 0.003 \epsilon'$:

$$\alpha = \frac{\omega (0.003 \epsilon')}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} = 0.0015 \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon'}{\cancel{\epsilon'}}}$$

$$= 0.0015 \omega \sqrt{\mu \epsilon'}, \quad \epsilon' = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 = 16 \epsilon_r, \text{ tengo que}$$

$$= 0.0015 \omega \sqrt{\mu_0 16 \epsilon_0} = 0.006 \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 0.00377 \approx$$

$$\alpha \approx 0.004$$

3) Calculo la amplitud de la onda transmitida tras recorrer 100 metros:

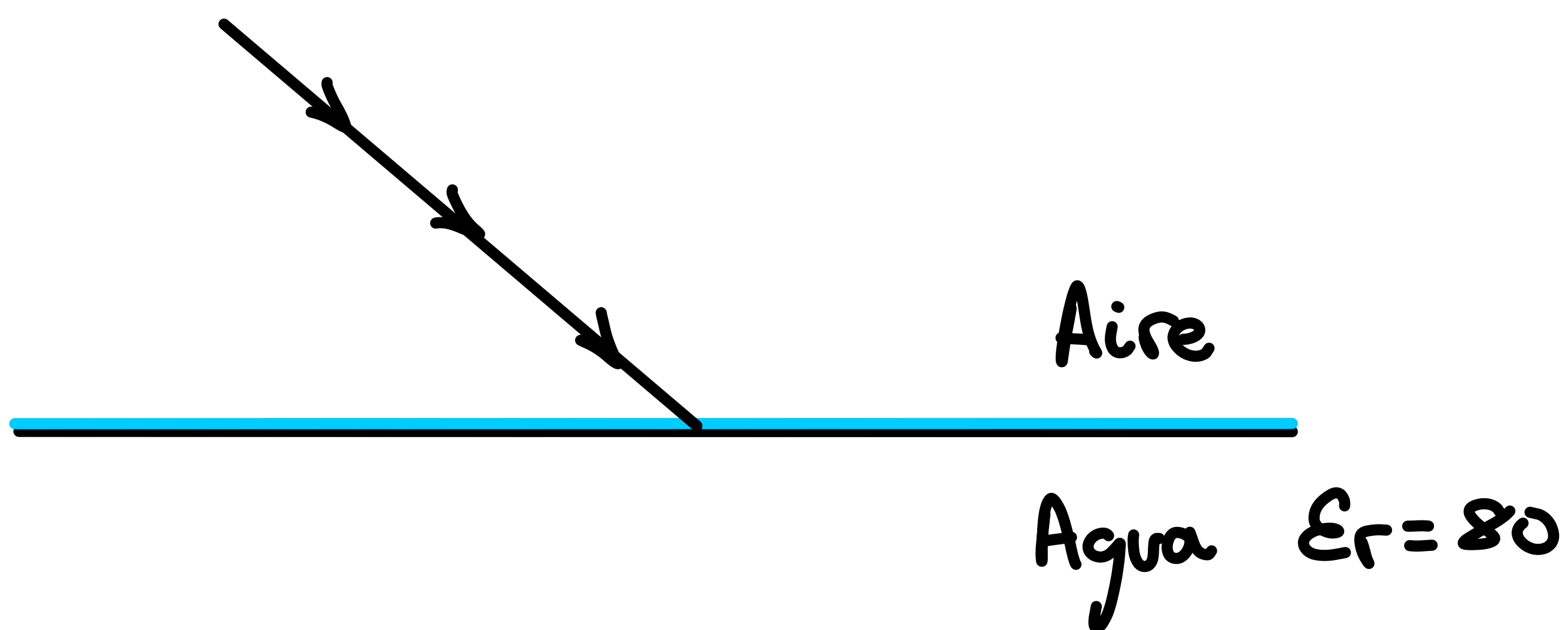
$$E_z(z) = 0.4 e^{-\alpha z} \underset{z=100}{=} E_z(100) = 0.268 \text{ V/m}$$

4) Calculo $\tau_{2 \rightarrow 1} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = 1.6 = \frac{E_{\tau'}}{E_I'}$, con $E_I' = E_z(100)$ y $E_{\tau'}$ la amplitud que pasa nuevamente al aire, tengo que

$$E_{\tau'} = 1.6 \cdot E_z(100) = 0.4288 \text{ V/m}$$

Solución ej. 12

Ejercicio 13



A) θ_B θ_T

B) Si θ_B , Γ y τ ?

Polarización paralela

Sabemos por la polarización paralela la incidencia oblicua es de una onda TM, entonces:

A) El ángulo de Brewster lo obtengo de $\theta_B = \arctan\left(\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}\right)$,
 ϵ_2 (agua) = $80\epsilon_0$ y $\epsilon_1 = \epsilon_0$, entonces: $\theta_B = \arctan\left(\sqrt{\frac{80\epsilon_0}{\epsilon_0}}\right)$
} en radianes = $1,459$ rad {
} en decimal = $83,620^\circ$ {.

B) Una onda TM que incide sobre la interfaz con el ángulo de Brewster, cumple que $\Gamma = 0$, y con $1 + \Gamma = \tau \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$
despejo que $\tau = \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_t}$.

Necesito saber θ_i , uso las leyes de Snell:

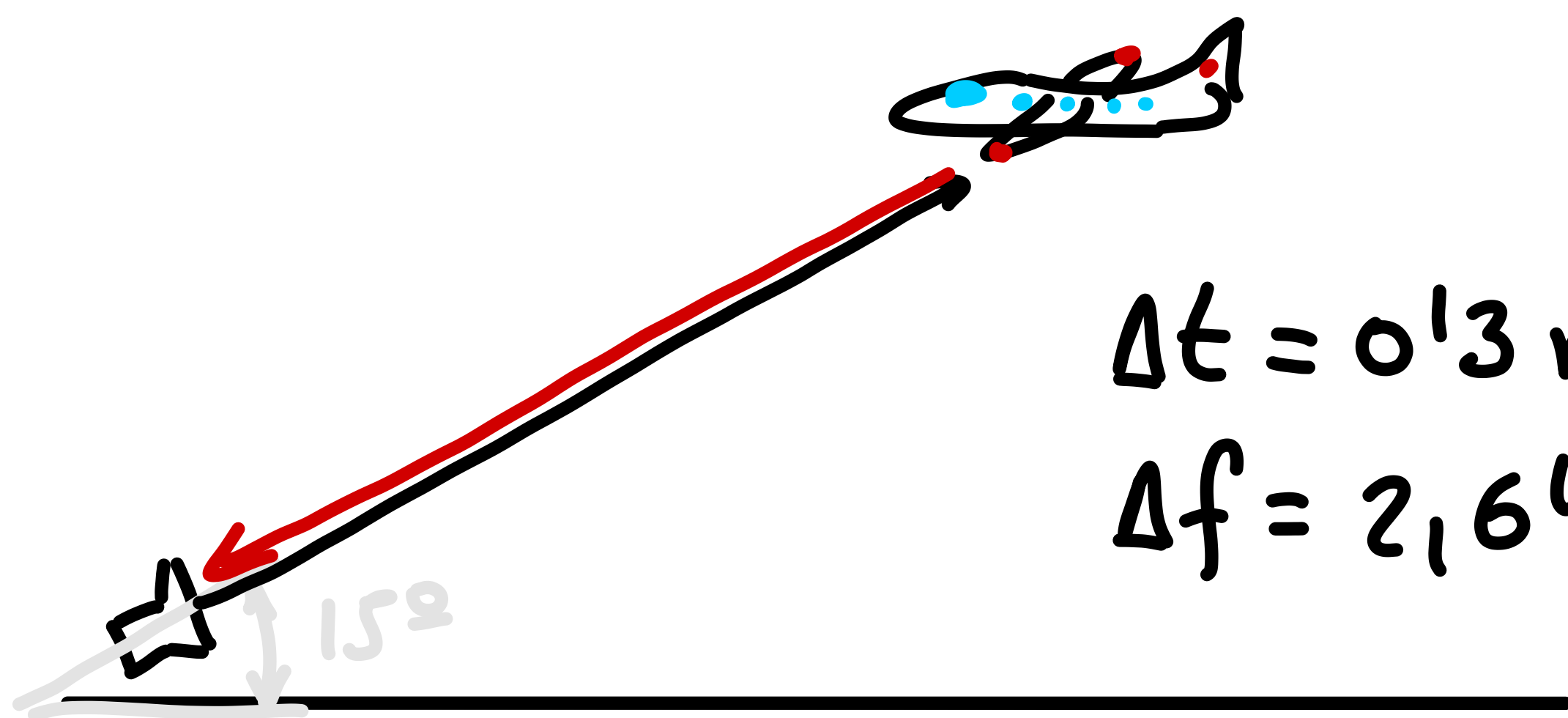
$$k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t \Rightarrow k_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{como los} \\ k_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \end{array} \right.$$

medios no son magnéticos, entonces: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ y

$$\cancel{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \sin \theta_i = \cancel{\omega \sqrt{\mu_0 80 \epsilon_0}} \sin \theta_t \Leftrightarrow \sin \theta_i = \sqrt{80} \sin \theta_t$$

y tengo que $\theta_t = 6,379^\circ$ y tengo que $\tau = \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_t} = 0,111$

Ejercicio 14



A) Distancia

B) Altura

c) Velocidad avión

$$\Delta t = 0.3 \text{ ms}$$

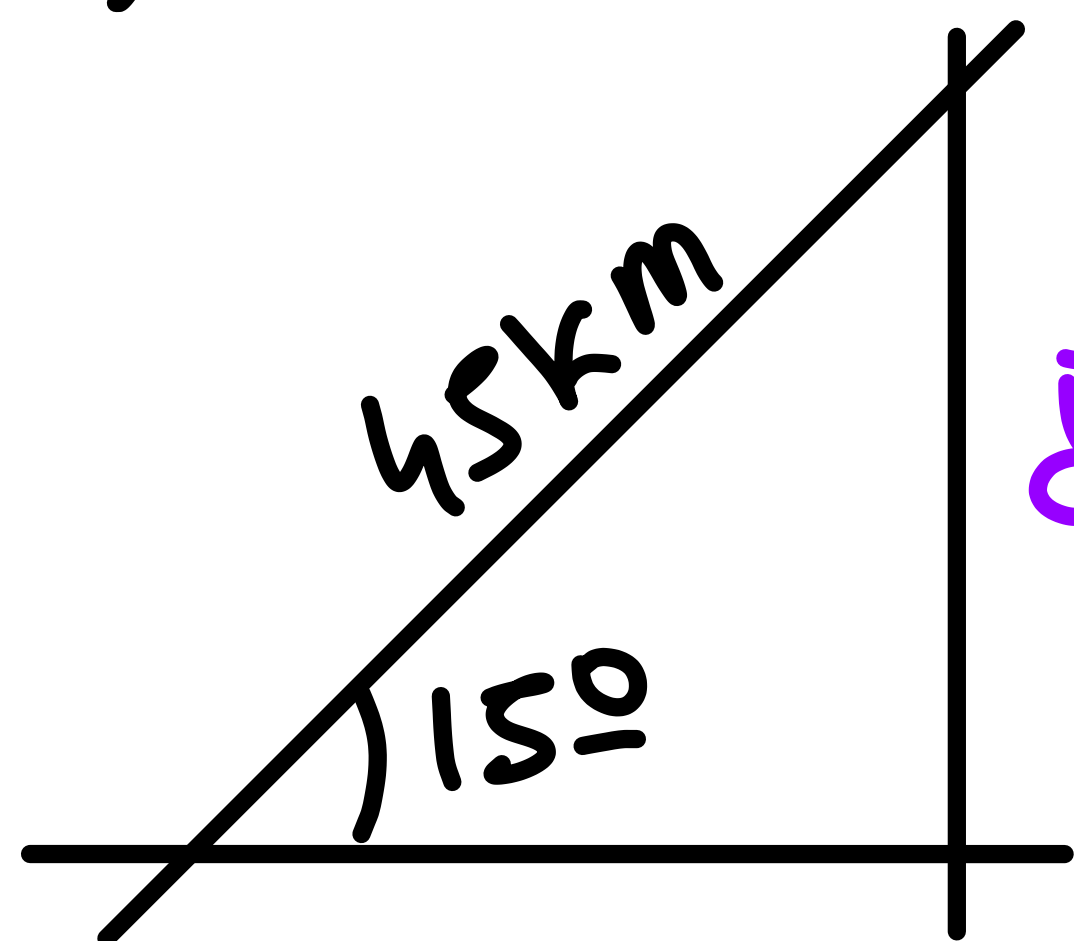
$$\Delta f = 2.64 \text{ kHz}$$

A) Sabemos la velocidad y el tiempo, $v = \frac{\Delta e}{\Delta t}$, despejo Δe que es el espacio (distancia) recorrido $\Delta e = \Delta t \cdot v$.

$$\text{Con } v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ y } \Delta t = 0.0003 \text{ s, } \Delta e = 90.000 \text{ m}$$

Pero Δe incluye la ida y la vuelta, por tanto, la distancia a la que se encuentra el avión es $\Delta e / 2 = 45 \text{ km}$

B) Uso relaciones trigonométricas:



¿altura?

$$\sin 15^\circ = \frac{\text{altura}}{\text{hipotenusa}} \Leftrightarrow \text{hip.} \sin 15 = \text{altura}$$

$$\text{altura} \approx 11.65 \text{ km}$$

C) Para la velocidad tengo que aplicar 2 veces Doppler:

[1er] Emisor estático $\rightarrow$ "receptor en movimiento".

$$f_{\text{avión}} = f_0 \frac{v_p \pm v_{\text{avión}}}{v_p \mp v_{\text{radar}}} = f_0 \left[\frac{c + v_{\text{avión}}}{c} \right] \quad \text{el avión se acerca}$$

[2º] La onda rebota en el avión y este se convierte en el nuevo "emisor"

$$f_{\text{final}} = f_{\text{avión}} \frac{\cancel{V_p} \pm \cancel{V_{\text{radar}}}}{\cancel{V_p} \mp V_{\text{avión}}} = f_{\text{avión}} \left[\frac{c}{c \ominus V_{\text{avión}}} \right]$$

↑
el avión se acerca

$$f_{\text{final}} = f_0 \left[\frac{c + V_{\text{avión}}}{c} \right] \left[\frac{c}{c - V_{\text{avión}}} \right] = f_0 \left(\frac{c + V_{\text{avión}}}{c - V_{\text{avión}}} \right)$$

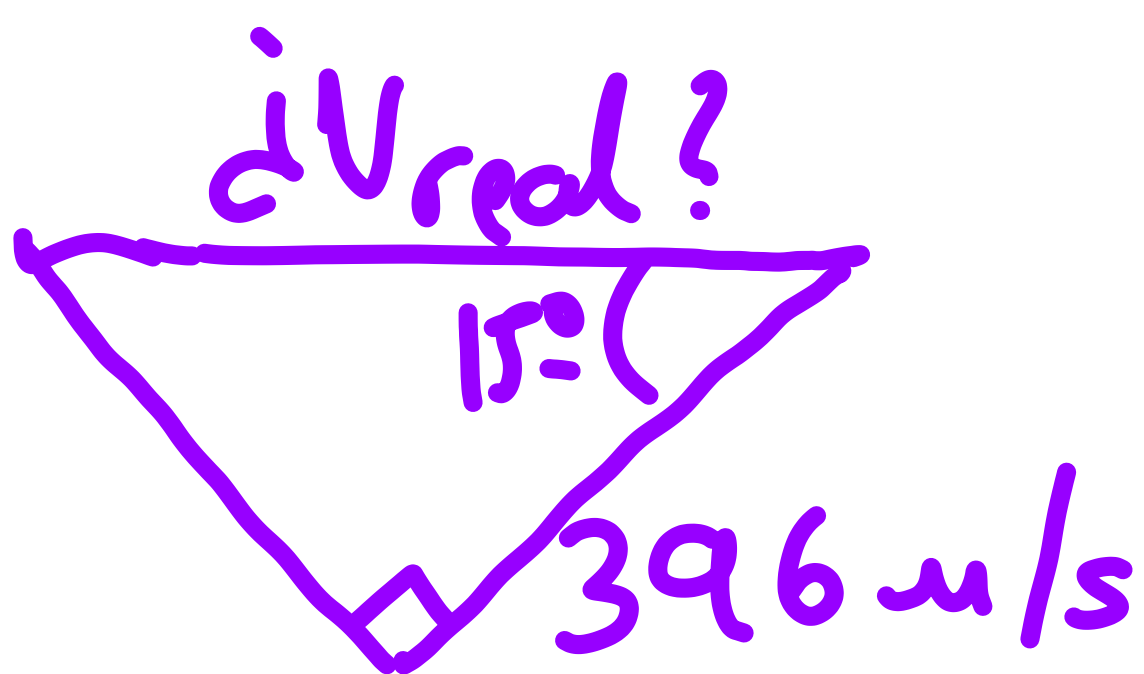
como el avión se aproxima, $f_{\text{final}} > f_0$, entonces:

$f_{\text{final}} = f_0 + \Delta f$ y entonces:

$$f_0 + \Delta f = f_0 \left[\frac{c + V_{\text{avión}}}{c - V_{\text{avión}}} \right] \Leftrightarrow$$

$$\frac{f_0 + \Delta f}{f_0} (c - V_{\text{avión}}) = c + V_{\text{avión}} \Leftrightarrow V_{\text{avión}} = 396 \text{ m/s}$$

Tengo ahora la velocidad que mide Doppler, pero no es la real del avión. Este viaja paralelo al suelo y no hacia el radar como tal. $V_{\text{avión}}$ es la velocidad del avión a -15° respecto su eje. Para sacar la real tengo que resolver el siguiente triángulo:



$$\cos 15^\circ = \frac{396}{V_{\text{real}}} \Leftrightarrow V_{\text{real}} = \frac{396}{\cos 15^\circ} = 410 \text{ m/s}$$