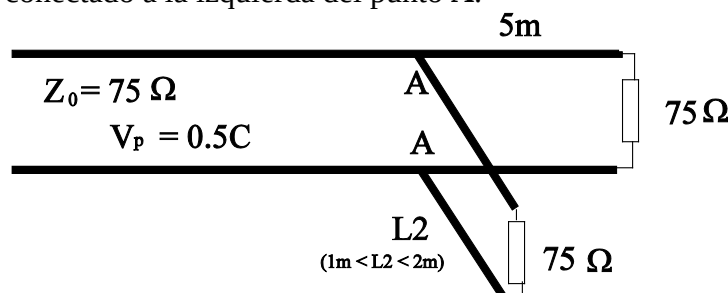


Líneas de Transmisión. Problemas propuestos.

1. Se tiene un tramo de 60cm de una línea de transmisión con impedancia característica 50Ω . Considerando que la longitud de onda de la señal es 2m y una impedancia de carga $25 + j 50 \Omega$. Calcular analíticamente la impedancia de entrada.
2. Una línea con impedancia característica 50Ω , impedancia de carga $10 - j60 \Omega$, longitud 45cm y velocidad de propagación $0.8c$, está conectada a un generador de 10V, 50Ω de impedancia de salida y frecuencia de trabajo 0.4GHz. Calcular: Potencia entregada a la carga; Coeficiente de reflexión y SWR; Adaptarla con un stub en corto situado en la posición más cercana a la carga; Potencia entregada a la carga antes de la adaptación y una vez adaptada.
3. En una línea de 60m acabada en abierto se ha realizado un estudio de reflectometría midiéndose un pulso reflejado de 3.8V con un retraso de $0.44 \mu s$ respecto al pulso incidente de 4.2V. Obtener: velocidad de propagación y coeficiente de atenuación α .
4. A esta línea, del problema anterior, se le coloca una carga y un generador adaptados. El generador tiene una amplitud de salida de 1V y una frecuencia de trabajo variable. ¿A qué frecuencia se medirá un desfase de $\pi/4$ entre la tensión a la entrada y la tensión en la carga?
5. Considerando la misma línea del problema anterior pero con un corto a fin de línea. A qué frecuencia se medirá un mínimo de tensión a la entrada.
6. Una pista de circuito impreso alimenta a una antena que trabaja a 2.4 GHz. La pista presenta una impedancia característica de 50Ω y una velocidad de propagación de $0.75c$. La antena representa una carga para el circuito de $75 + j 10 \Omega$, (a la frecuencia de trabajo). Se quiere adaptar la carga al circuito utilizando un stub acabado en corto. El stub se hace con un cable coaxial plateado de reducidas dimensiones con impedancia característica de 75Ω y una velocidad de propagación es $0.9c$. Expresar la posición del stub y su longitud en milímetros.
7. Se utiliza un cable coaxial de impedancia característica 75Ω para alimentar dos aparatos de televisión, en paralelo, que suponen una carga de 75Ω cada uno. Uno de los aparatos está situado a 5 metros de la conexión y del otro solo se sabe que está situado a una distancia de uno a dos metros. Calcular la carga equivalente que hay que colocar en el punto A para poder sustituir los dos aparatos de televisión junto con sus tramos de línea. Adaptar dicha carga a la línea utilizando un stub en corto conectado a la izquierda del punto A.



8. En una línea sin pérdidas de 1.5 metros de longitud se ha medido una impedancia al comienzo de línea de $-j 54.6 \Omega$ cuando la línea se acaba en corto, y se mide $j 103 \Omega$ cuando la línea se acaba en abierto. Calculad la impedancia característica de la línea y la constante de propagación.
9. Una línea con pérdidas trabaja a una frecuencia angular de 10^6 rad/s, tiene una impedancia característica de $60 + j 40 \Omega$, unas pérdidas de 8 dB/m y la constante de fase es 1 rad/m. Se pide calcular la impedancia de entrada si la línea posee dos metros de longitud y la impedancia de carga es $20 + j 50 \Omega$.
10. Una línea con impedancia característica 75Ω , impedancia de carga $25 - j90 \Omega$, longitud 35cm y velocidad de propagación $0.82c$, está conectada a un generador de tensión V_g , $Z_g = 75 \Omega$, y frecuencia de trabajo 454 MHz. Se pide:

- Calcular la tensión del generador mínima necesaria para que la potencia promedio entregada a la carga sea de 100 mW,
- ¿Qué potencia promedio suministra el generador?

En el caso de que la carga se adaptase a la línea:

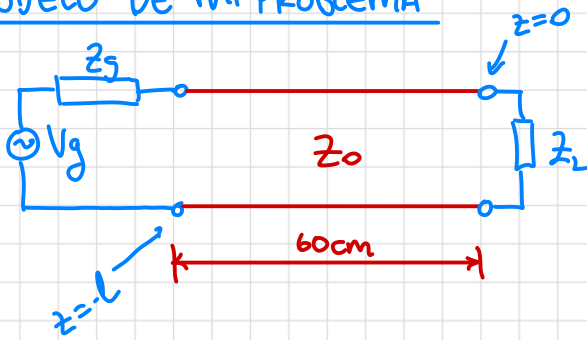
- ¿Cuál sería la mínima tensión del generador para que la potencia promedio entregada a la carga fuese la misma?
 - ¿Qué potencia promedio suministra el generador?
11. Una línea con $Z_0 = 50 \Omega$, acaba en dos resistencias de carga en paralelo de 50 y 75Ω , la tensión al comienzo de línea es $v_e(t) = 10 \cos(6 \times 10^9 t)$ V, y la longitud de la línea es de 3 séptimos de longitud de onda. ¿Qué potencia promedio se entrega a cada carga?
12. Una línea de impedancia característica de 75Ω y $v_p = 0.8c$ es acabada en corto y se mide un máximo de tensión a 25cm del corto de 7.5 mV. A continuación se sustituye el corto por una carga desconocida y se detecta un máximo de 12 mV a 5 cm de la carga y un mínimo de 5 mV en una posición desconocida. Hallar la impedancia de carga. ¿Cuál es la frecuencia de trabajo?
13. Un generador de tensión continua V_0 y con resistencia de salida nula se conecta a una carga a través de una línea de transmisión de longitud l , impedancia característica R_0 y velocidad de propagación v_p . En mitad de la línea hay un interruptor en abierto que se cierra en $t=0$. Dibujad la tensión en la carga en función del tiempo sabiendo que la carga está adaptada a la línea.
14. Se quiere determinar la nitidez en la posición de los máximos y de los mínimos en una onda estacionaria. Para ello suponed que se posee una línea de transmisión con una carga normalizada de $4.2 + j 1.2$, $v_p = c$, frecuencia de trabajo de 300 MHz, y en la que se ha medido un mínimo de 200 mV. Determinar el ancho de la posición del mínimo y del máximo considerando que es el intervalo en el que la medida se aproxima al 90% del valor esperado.

1. Se tiene un tramo de 60cm de una línea de transmisión con impedancia característica 50Ω . Considerando que la longitud de onda de la señal es 2m y una impedancia de carga $25 + j 50 \Omega$. Calcular analíticamente la impedancia de entrada.

DATOS

- * $Z_0 = 50 \Omega$ (impedancia LT)
- * $Z_L = 25 + j 50 \Omega$ (impedancia carga)
- * $\lambda = 2m \Rightarrow \beta = 2\pi/\lambda = \pi$ (constante de fase)
- * $l = 0.6m$ (longitud LT)
- * asumo que la LT no tiene pérdidas ($\alpha = 0$; coe. de atenuación)

MODELO DE MI PROBLEMA



CALCULO DE Z_{in}

Como la LT no tiene pérdidas,

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + j Z_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + j Z_L \tan(\beta l)}$$

sustituyo los datos y calculo Z_{in} :

$$Z_{in} = Z_0 \left[\frac{25 - 103,884i}{203,884 - 76,942i} \right] = 13,782 - 20,275i. \text{ Entonces, } |Z_{in}| = 24,515 \Omega$$

2. Una línea con impedancia característica 50Ω , impedancia de carga $10-j60 \Omega$, longitud 45cm y velocidad de propagación $0.8c$, está conectada a un generador de 10V , 50Ω de impedancia de salida y frecuencia de trabajo 0.4GHz . Calcular: Potencia entregada a la carga; Coeficiente de reflexión y SWR; Adaptarla con un stub en corto situado en la posición más cercana a la carga; Potencia entregada a la carga antes de la adaptación y una vez adaptada.

DATOS

$$Z_0 = 50 \Omega$$

$$Z_L = (10 - j60) \Omega$$

$$l = 45 \text{ cm}$$

$$V_p = 0.8c$$

$$V_g = 10\text{V}$$

$$Z_g = 50 \Omega$$

$$f = 0.4 \text{ GHz}$$

Asumo LI sin pérdidas

PIDEN

$$\otimes \Gamma_L, \text{ SWR}$$

$\otimes$ Diseñar stub en corto

$\otimes$ Potencia transmitida antes

y después del stub.

CALCULAMOS COEF. REFLEXIÓN

Como $Z_g = Z_0$, luego, no hay reflexión en el lado de la fuente.

Como $|Z_L| \neq |Z_0|$, hay reflexión en el lado de la carga. Γ_L viene dado por:

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{1}{6} - \frac{5}{6}i \Rightarrow |\Gamma_L| = 0.850$$

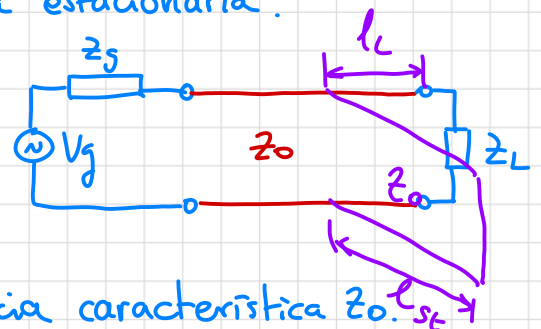
sustituyo con mis datos

Por tanto, vemos que la carga refleja casi toda la señal incidente.

CÁLCULO DE LA SWR

Como $|Z_L| \neq |Z_0|$, se produce una onda estacionaria.

$$\text{SWR} = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} = 12.333$$



DISEÑO DE UN STUB EN CORTO

Asumimos un stub sin pérdidas e impedancia característica Z_0 .

Necesito calcular la admitancia de entrada $Y_{in} = Z_{in}^{-1}$

$$Y_{in} = Y_0 \left(\frac{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)}{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)} \right) + Y_{\text{stub}}$$

Adaptación de carga



Para sacar Y_{stub} y l se debe cumplir que $Y_{in} = \frac{1}{50}$:

→ DESPEJO l_L

Sabemos que $\operatorname{Re}(Y_{in}) = \operatorname{Re}\left(Y_0 \left[\frac{z_0 + jz_L \tan(\beta l)}{z_L + jz_0 \tan(\beta l)} \right] \right)$, de aquí despejo l_L :

$$\operatorname{Re}\left[\frac{Y_{in}}{Y_0}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{z_0 + j(A+jB)t}{(A+jB) + jz_0 t}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{z_0 - Bt + jAt}{A + j(B+z_0 t)}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{(z_0 - Bt + jAt)(A - j(B+z_0 t))}{A^2 + (B+z_0 t)^2}\right] \quad \langle // \rangle$$

$\uparrow$ $z_L = A + jB$
 $\tan(\beta l) = t$

$\uparrow$ conjugado del denominador

$$\langle // \rangle \quad 1 = \frac{z_0 A (1+t^2)}{A^2 + (B+z_0 t)^2} \Leftrightarrow A^2 + (B+z_0 t)^2 = z_0 A (1+t^2) \quad \langle // \rangle$$

$$\Leftrightarrow 0 = (z_0 A - A^2 - B^2) - 2Bz_0 t + (z_0 A - z_0^2) t^2$$

$-3200 \quad +6000t \quad -2000t^2$
 $\Leftrightarrow 0 = -3,2 + 6t - 2t^2 \Leftrightarrow t_1 = 2,306$
 $t_2 = 0,694$

$\left\{ \begin{array}{l} A = 10 \\ B = -60 \\ z_0 = 50 \end{array} \right.$

$\beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{10}{3} \text{ rad/m}$

Ahora, $t = \tan(\beta l_L) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t_1: \frac{\arctan(2,306)}{\beta} = l_L = 0,111 \text{ m} \\ t_2: \frac{\arctan(0,694)}{\beta} = l'_L = 0,0579 \text{ m} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} l'_L < l_L \end{array} \right.$

El stub se situará a 0,0579 m de la carga.

→ DESPEJO l_{st}

Sabemos que $\operatorname{Im}(Y_{in}) = 0 = \operatorname{Im}\left(Y_0 \frac{z_0 + jz_L \tan(\beta l_L)}{z_L + jz_0 \tan(\beta l_L)} + Y_{st}\right)$.

Como el stub está en corto, $Y_{st} = -jY_0 \frac{1}{\tan(\beta l_{st})}$.

Despejo la parte imaginaria:

$$\operatorname{Im}(Y_{in}) = 0 = \operatorname{Im}\left((1 + 3,226)Y_0 + Y_{st}\right) \Leftrightarrow \frac{\arctan\left(\frac{1}{3,226}\right)}{\beta} = l_{st} = 0,0287$$

El stub tendrá una longitud

→ CALCULAMOS LA POTENCIA TRANSMITIDA ANTES Y DESPUÉS

CASO ADAPTADO

Calculo V_{in} para caso adaptado: $V_{in} = \frac{V_g Z_{in}}{Z_g + Z_{in}} = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5V$

$$Z_{in} = 50 \Omega$$

$$Z_g = 50 \Omega$$

La potencia transmitida $P_{adaptada} = \frac{1}{2} V_{in} \underbrace{I_{in}^*}_{\substack{\text{con } \alpha=0 \\ \uparrow}} e^{-2\alpha z} = \frac{1}{2} \frac{V_{in}^2}{Z_{in}} = 0.250 W$

$I_{in} = \frac{V_{in}}{Z_{in}}$ (Ley de Ohm) = $\frac{V_{in}}{Z_{in}}$, entonces, $I_{in}^* = \frac{V_{in}}{Z_{in}}$

CASO NO ADAPTADO

Calculo $V_{in} = \frac{V_g Z_{in}}{Z_g + Z_{in}}$, pero necesito $Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)}$.

Sin embargo, no puedo calcular la tangente de forma normal por que me da error de calculo, significa que $\tan(\beta l) \rightarrow \infty$. Tomaremos el límite donde $\tan(\beta l) \rightarrow \infty$ y resolvemos la indeterminación:

$$\lim_{\tan(\beta l) \rightarrow \infty} Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)} = Z_0 \lim_{\tan(\beta l) \rightarrow \infty} \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)} = \frac{Z_0^2}{Z_L} = Z_{in}$$

entonces $Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L} = (6.757 + 40.541j) \Omega$

$\frac{\infty}{\infty} = \frac{jZ_0}{jZ_L} = \frac{Z_0}{Z_L}$
 $\uparrow$
tomo coef. líderes

Calculo $|V_{in}| = V_g \left| \frac{Z_{in}}{Z_g + Z_{in}} \right| = 0.589 V_g = 5.89 V$

Alonso

Como Z_{in} es complejo, calcularé la corriente que atraviesa la LI, porque la corriente que pasa a través de la parte reactiva ($\text{Im}(Z_{in})$) y no reactiva ($\text{Re}(Z_{in})$): $I_{in} = \frac{V_{in}}{|Z_{in}|} = 0.143 \Rightarrow P = \frac{1}{2} |I|^2 \text{Re}(Z_{in}) = 0.069 W$

3. En una línea de 60m acabada en abierto se ha realizado un estudio de reflectometría midiéndose un pulso reflejado de 3.8V con un retraso de 0.44 μ s respecto al pulso incidente de 4.2V. Obtener: velocidad de propagación y coeficiente de atenuación α .

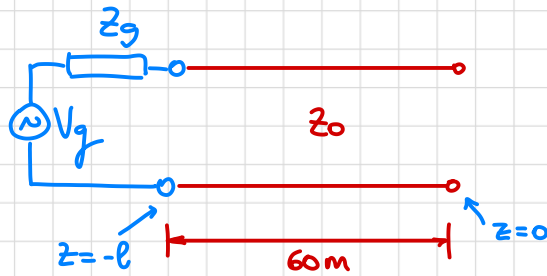
DATOS

$$l = 60 \text{ m}$$

$$V_o^- = 3.8 \text{ V}$$

$$V_o^+ = 4.2 \text{ V}$$

$$t = 0.44 \mu\text{s} = 0.44 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$



Piden V_{prop} y α

$$V_{prop} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{60 \text{ m} + 60 \text{ m}}{t} = 2.727 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

* circuito abierto

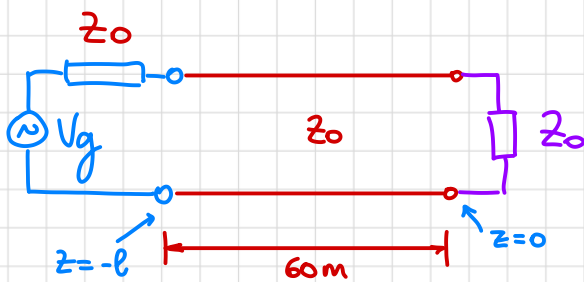
para calcular α , sé que $V_o^- = V_o^+ | \Gamma_L | e^{\gamma l}$, donde: *

- * $\gamma = \alpha + j\beta$
- * $l = -60 + (-60)$ (ida y vuelta)

$$\text{entonces: } V_o^- = V_o^+ e^{-120\alpha} \Leftrightarrow \frac{V_o^-}{V_o^+} = e^{-120\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{V_o^-}{V_o^+}\right) = -120\alpha \Rightarrow \alpha = 8.34 \cdot 10^{-4} \text{ Np/m}$$

4. A esta línea, del problema anterior, se le coloca una carga y un generador adaptados. El generador tiene una amplitud de salida de 1V y una frecuencia de trabajo variable. ¿A qué frecuencia se medirá un desfase de $\pi/4$ entre la tensión a la entrada y la tensión en la carga?



DATOS

$$Z_g = Z_L = Z_o$$

$$V_g = 1 \text{ V} \quad \text{y} \quad f = (\text{var.})$$

CALCULAR f TAL QUE HAYA UN DESFASE DE $\pi/4$ ENTRE $z = -60$ Y $z = 0$

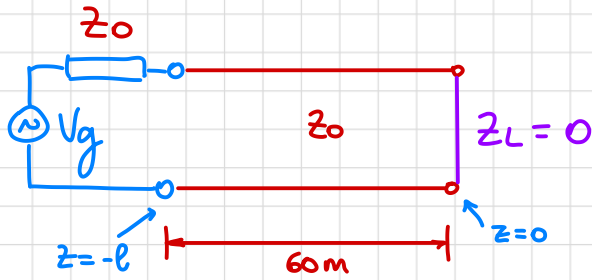
Dado que $Z_g = Z_o = Z_L$, $\Gamma_{\text{fuente}} = \Gamma_{\text{carga}} = 0$. Por tanto, solo hay una onda viajera. El único desfase que hay es entre $z = -60$ y $z = 0$:

$$\begin{cases} * \text{ en } z = 0, \beta l = 0 \\ * \text{ en } z = -60, \beta l = -60\beta \end{cases} \Rightarrow \Delta\beta = 0 + 60\beta = 60\beta$$

$$\text{Ahora, busco } f \text{ tal que } \Delta\beta = \frac{\pi}{4} = 60\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{240} = \frac{\omega}{v_p} \Leftrightarrow \frac{2\pi f}{v_p} = \frac{\pi}{240}$$

$$f = 568.125 \text{ KHz}$$

5. Considerando la misma línea del problema anterior pero con un corto a fin de línea. A qué frecuencia se medirá un mínimo de tensión a la entrada.



Sabemos que $Z_L = 0$, entonces, al inicio de la LI se produce un nodo cuando $\beta l = m\pi$, $m \in \mathbb{N}$, entonces: con $\beta = \frac{2\pi f}{v_p}$ y $\beta l = m\pi$, tengo que

$$f = \frac{m \cdot v_p}{2l}, \text{ y con } m=1 \text{ para conseguir la primera } f \text{ que nos produce un nodo, } f = 2,272 \text{ MHz.}$$

6. Una pista de circuito impreso alimenta a una antena que trabaja a 2.4 GHz. La pista presenta una impedancia característica de 50Ω y una velocidad de propagación de $0.75c$. La antena representa una carga para el circuito de $75 + j10 \Omega$, (a la frecuencia de trabajo). Se quiere adaptar la carga al circuito utilizando un stub acabado en corto. El stub se hace con un cable coaxial plateado de reducidas dimensiones con impedancia característica de 75Ω y una velocidad de propagación es $0.9c$. Expresar la posición del stub y su longitud en milímetros.

DAIOS

$$Z_0 = 50 \Omega$$

$$Z_S = 75 \Omega$$

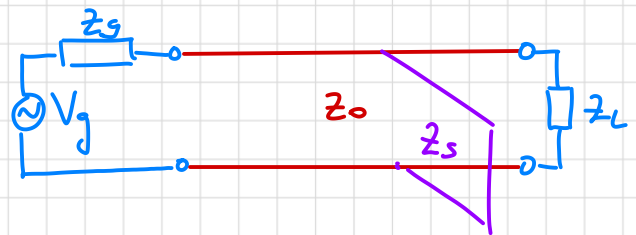
$$Z_L = 75 + j10 \Omega$$

$$v_{p-\text{stub}} = 0.9c$$

$$f = 2.4 \text{ GHz}$$

$$\text{Asumo que } Z_g = Z_0.$$

$$v_p = 0.75c$$



β

* Busco l_L , l_{st}

Cálculo de parámetros del stub

Asumo stub sin pérdidas. Impedancia característica Z_s .

Cálculo Y_{in} :

$$Y_{in} = Y_0 \left(\frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)} \right) + Y_{stub}; \text{ con } Y_{in} = \frac{1}{50}, \text{ despejo } l \text{ y } Y_{stub}.$$

→ PARÁMETRO l_L

$$\text{Re}(Y_{in}) = \text{Re} \left(Y_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)} \right) \quad \begin{matrix} \tan(\beta l) = t \\ Z_L = A + jB \end{matrix} \quad \begin{matrix} Z_0 = 50 \\ A = 75 \\ B = 10 \end{matrix}$$

$$< // > 0 = (Z_0 A - A^2 - B^2) - 2BZ_0 t + (Z_0 A - Z_0^2)t^2$$

$$\begin{matrix} -1975 & 1000 & 1250 \end{matrix}$$

Saco que $\tan(\beta l)$ es: $\begin{cases} t_1 = 1.719 \rightarrow l_L = 0.0156 \\ t_2 = -0.919 \rightarrow l_L = -0.0111 + \frac{\lambda}{2} = 0.0358 \end{cases} \rightarrow l_L = 0.0156 \text{ m}$

$$l_L = 0.0156 \text{ m} = 15.6 \text{ mm}$$

como l_L me ha salido negativo, voy sumando $\frac{\lambda}{2}$ hasta que me sale positivo.

→ PARÁMETRO l_{stub}

$$I_{\text{in}}(Y_{\text{in}}) = 0 = I_{\text{in}}\left(Y_0 \left(\frac{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l_L)}{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l_L)} \right) + Y_{\text{stub}} \right) \text{ y despejo } Y_{\text{stub}}:$$

$$0 = I_{\text{in}}(Y_0(1 + 0.440j) + Y_{\text{stub}}) \Leftrightarrow \boxed{-0.440 Y_0 = I_{\text{in}}(Y_{\text{stub}})}$$

$$\text{Sabiendo que el stub está en corto, } Y_{\text{stub}} = -jY_{\text{stub}} \cotan(\beta_{\text{stub}} l_{\text{stub}})$$

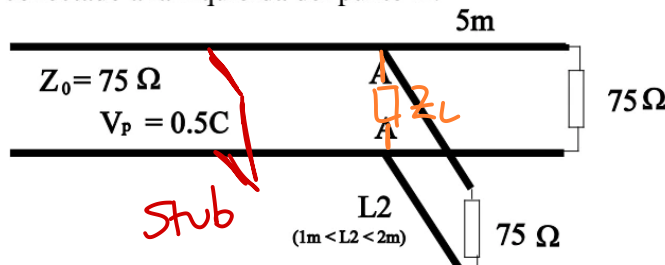
$$Y_{\text{stub}} = Z_S^{-1} = \frac{1}{75}$$

$$\beta_{\text{stub}} = \frac{\omega}{v_{\text{p stub}}} = \frac{2\pi f}{v_{\text{p stub}}} = \frac{160}{9} \pi$$

difieren las propiedades del stub de la LT principal

$$-0.440 Y_0 = -\frac{1}{75} \cotan\left(\frac{160}{9} \pi l_{\text{stub}}\right) \Leftrightarrow l_{\text{stub}} = 0.0177 \text{ m} = 17.7 \text{ mm}$$

7. Se utiliza un cable coaxial de impedancia característica 75Ω para alimentar dos aparatos de televisión, en paralelo, que suponen una carga de 75Ω cada uno. Uno de los aparatos está situado a 5 metros de la conexión y del otro solo se sabe que está situado a una distancia de uno a dos metros. Calcular la carga equivalente que hay que colocar en el punto A para poder sustituir los dos aparatos de televisión junto con sus tramos de línea. Adaptar dicha carga a la línea utilizando un stub en corto conectado a la izquierda del punto A.



DATOS

$$Z_0 = 75 \Omega \quad // \quad Z_{01} \text{ y } Z_{02} = 75 \Omega \quad (\text{en la misma LT})$$

$$Z_{L1} = 75 \Omega$$

$$Z_{L2} = 75 \Omega$$

$$v_p = 0.5c$$

ASUMO LC SIN PÉRDIDAS

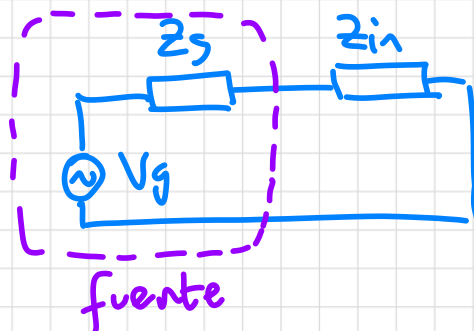
* Píden obtener Z_{in} en A } Z_{in} es la carga de las dos teles

* Píden calcular un stub en corto con Z_L para adaptar la carga.

PAso 1) Buscar Z_{in} equivalente:

Como $Z_0 = Z_{L1} = Z_{L2}$, se cumple que $Z_{in} = Z_0$ independientemente de la longitud de la longitud de la LL.

Por tanto, el problema se simplifica. La fuente ve solo dos impedancias idénticas en paralelo, por lo que, $Z_{in} = \frac{1}{\frac{1}{75} + \frac{1}{75}} = \frac{1}{\frac{2}{75}} = \frac{75}{2} = 37,5 \Omega$ es la impedancia que ve la fuente.



Entonces, el circuito anterior se simplifica en:

PAso 2) Calcular stub en corto:

Hemos llegado a un problema parecido al 2:

→ Calculo l_L

$$\text{Saco } t_1 \text{ y } t_2 \text{ tal que: } 0 = (Z_0 A - A^2 - B^2) - 2BZ_0 t + (Z_0 A - Z_0^2) t^2 < // >$$

$$Z_0 = 75 \Omega$$

$$Z_{in} = 37,5$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$t_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Ahora, } \tan(\beta l_L) = \begin{cases} t_1 = \sqrt{2}/2 \rightarrow l_L = +0,0980\lambda \\ t_2 = -\sqrt{2}/2 \rightarrow l_L' = -0,0980\lambda \quad (+\lambda/2 \Rightarrow l_L' = 0,402\lambda) \end{cases}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

→ como no tengo f , deajo l_L en función de λ

→ Calculo l_{stub}

$$\text{Im}(Y_{in}) = 0 = \text{Im}\left(Y_0 \frac{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l_L)}{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l_L)} + Y_{stub}\right), \text{ y tengo que } Y_{stub} \text{ es}$$

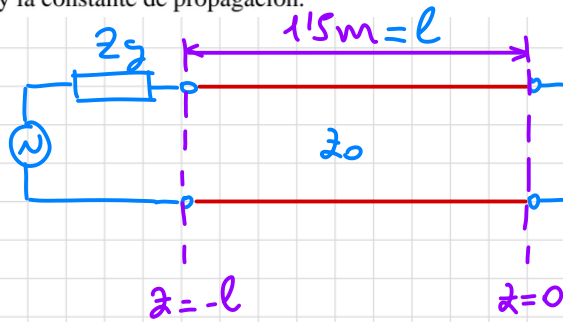
$$\boxed{\text{Im}(Y_{stub}) = +0,707 Y_0} \rightarrow \text{con stub en corto, } Y_{stub} = -j Y_0 \cotan(\beta l_{scr}) \text{ y entonces, } l_{scr} \text{ es:}$$

$$+0,707 Y_0 = -Y_0 \cotan(\beta l_{scr}) \Leftrightarrow -0,707 = \frac{1}{\tan(\beta l_{scr})} \Leftrightarrow \frac{\arctan(-0,707)}{2\pi} \lambda = l_{scr}$$

$$\Leftrightarrow l_{scr} = -0,152\lambda \quad (+\lambda/2 \text{ para que sea positivo } \boxed{l_{scr} = 0,348\lambda})$$

8. En una línea sin pérdidas de 1.5 metros de longitud se ha medido una impedancia al comienzo de línea de $-j 54.6 \Omega$ cuando la línea se acaba en corto, y se mide $j 103 \Omega$ cuando la línea se acaba en abierto. Calculad la impedancia característica de la línea y la constante de propagación.

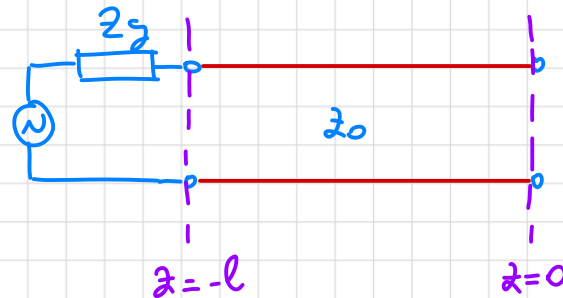
CASO CORTO



$$Z_{in} = -j 54.6 \Omega$$

$$Z_{in} = j Z_0 \tan(\beta l)$$

CASO ABIERTO



$$Z_{in} = j 103 \Omega$$

$$Z_{in} = -j Z_0 / \tan(\beta l)$$

Resuelto el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -j 54.6 = j Z_0 \tan(\beta l) \\ j 103 = -j Z_0 / \tan(\beta l) \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan(\beta l) = t \\ \tan(\beta l) = t^{-1} \end{array} \right\} \quad \begin{cases} -j 54.6 = j Z_0 t \\ j 103 = -j Z_0 t^{-1} \end{cases} \quad \text{y despejo}$$

$$Z_0 \text{ igualando los } t: \frac{-j 54.6}{j Z_0} = \frac{-j Z_0}{j 103} \Leftrightarrow \cancel{-j} 54.6 \cdot 103 = \cancel{j} Z_0^2 \Leftrightarrow$$

$$Z_0 = \sqrt{54.6 \cdot 103} = 74.991 \Omega$$

Ahora, despejo $\tan(\beta l)$ substituyendo Z_0 :

$$\frac{-j 54.6}{j Z_0} = \tan(\beta l) \Leftrightarrow \arctan(-0.728) = \beta \cdot 1.5 \Leftrightarrow \beta = -0.420$$

Como $\beta < 0$, tenemos que sumarle π a la arctan, entonces:

$$\beta_{\text{real}} = \frac{\arctan(-0.728) + \pi}{1.5} = 1.675 \text{ rad/m}$$

Atun

9. Una línea con pérdidas trabaja a una frecuencia angular de 10^6 rad/s, tiene una impedancia característica de $60 + j40 \Omega$, unas pérdidas de 8 dB/m y la constante de fase es 1 rad/m. Se pide calcular la impedancia de entrada si la línea posee dos metros de longitud y la impedancia de carga es $20 + j50 \Omega$.

DATOS

$$\omega = 10^6 \text{ rad/s}$$

$$Z_0 = 60 + j40 \Omega$$

$$\alpha = 8 \text{ dB/m} \quad * \text{ Hay que pasarlo a Np/m}$$

$$\beta = 1 \text{ rad m/s}$$

PIDEN

$$* Z_{in} \text{ si } l=2\text{m y } Z_L=20+j50 \Omega$$

PASO 1) PASO α a Np/m

$$1 \text{ Np} = 8.686 \text{ dB}, \text{ entonces, } \alpha = \frac{8}{8.686} = 0.921 \text{ Np/m}.$$

$$\text{Entonces: } \alpha = 0.921 \text{ Np/m}$$

PASO 2) Calcular Z_{in}

Como la Lc tiene pérdidas, Z_{in} viene dado por:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L(e^{\gamma l} + \Gamma_L e^{-\gamma l}) + Z_0(e^{\gamma l} - \Gamma_L e^{-\gamma l})}{Z_L(e^{\gamma l} - \Gamma_L e^{-\gamma l}) + Z_0(e^{\gamma l} + \Gamma_L e^{-\gamma l})}$$

Handwritten signature

→ → PRE PASO 2) Calculo Γ_L y γ : (también γl)

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -0.159 + 0.303j = \Gamma_L$$

⊗ Atención a que Γ_L es complejo.

$$\begin{aligned} Z_0 &= 60 + j40 \Omega \\ Z_L &= 20 + j50 \Omega \end{aligned}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0.921 + j = \gamma \rightarrow \gamma l = 2 \cdot (0.921 + j) = 1.842 + 2j$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.921 \text{ Np/m} \\ \beta &= 1 \text{ rad m/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma l &= 1.842 + 2j \\ \Gamma_L &= -0.159 + 0.303j \end{aligned}$$

PASO FINAL

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L(e^{\gamma l} + \Gamma_L e^{-\gamma l}) + Z_0(e^{\gamma l} - \Gamma_L e^{-\gamma l})}{Z_L(e^{\gamma l} - \Gamma_L e^{-\gamma l}) + Z_0(e^{\gamma l} + \Gamma_L e^{-\gamma l})} =$$

⦿ Vamos a calcular cada elemento por partes:

y con fórmula de Euler

$$* e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

$$* e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x)$$

$$* e^{\gamma l} = e^{1,842 + 2i} = e^{1,842} (\cos(2) + i \sin(2)) = -2,626 + 5,737i$$

$$* e^{-\gamma l} = e^{-1,842 - 2i} = e^{-1,842} (\cos(2) - i \sin(2)) = -0,0660 - 0,1144i$$

$$* \Gamma_L \cdot e^{-\gamma l} = (-0,154 + 0,303i) (\dots) = 0,0541 + 0,00290i$$

$$* e^{\gamma l} + \Gamma_L e^{-\gamma l} = (-2,626 + 5,737i) + (0,0541 + 0,00290i) = -2,572 + 5,740i$$

$$* e^{\gamma l} - \Gamma_L e^{-\gamma l} = (-2,626 + 5,737i) - (0,0541 + 0,00290i) = -2,680 + 5,734i$$

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L(e^{\gamma l} + \Gamma_L e^{-\gamma l}) + Z_0(e^{\gamma l} - \Gamma_L e^{-\gamma l})}{Z_L(e^{\gamma l} - \Gamma_L e^{-\gamma l}) + Z_0(e^{\gamma l} + \Gamma_L e^{-\gamma l})} = Z_0(1,006 + 0,000636i) =$$

$$Z_0 = 60 + j40 \Omega$$

$$Z_L = 20 + j50 \Omega$$

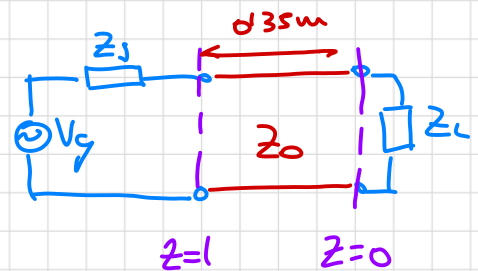
$$Z_{in} = 60,326 + 40,272i$$

10. Una línea con impedancia característica 75Ω , impedancia de carga $25 - j90 \Omega$, longitud 35cm y velocidad de propagación $0,82c$, está conectada a un generador de tensión V_g , $Z_g = 75 \Omega$, y frecuencia de trabajo 454 MHz . Se pide:

- Calcular la tensión del generador mínima necesaria para que la potencia promedio entregada a la carga sea de 100 mW ,
- ¿Qué potencia promedio suministra el generador?

En el caso de que la carga se adaptase a la línea:

- ¿Cuál sería la mínima tensión del generador para que la potencia promedio entregada a la carga fuese la misma?
- ¿Qué potencia promedio suministra el generador?



DAZOS

$$Z_0 = 75 \Omega$$

$$Z_L = 25 - j90 \Omega$$

$$l = 0,35 \text{ m}$$

$$V_p = 0,82c$$

$$V_g \leftarrow \text{no la conozco}$$

$$Z_g = 75 \Omega$$

$$f = 454 \text{ MHz}$$

PIDEN

$$* V_g \text{ mínimo para que } P = 100 \text{ mW}$$

$$* \text{Potencia que suministra el generador}$$

$$\text{Si } Z_L = Z_0 = Z_g,$$

$$* \text{Repetir puntos anteriores}$$

Atina

APARTADO A) V_g mínimo para tener 100 mW

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V_o I_o^*]$$

Asumo LT sin pérdidas: $\alpha=0$, entonces:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V_o I_o^*], \text{ ahora, } V_o \text{ es } V_{in} \text{ e } I_o \text{ es } I_{in}.$$

$$\text{Se que } I_{in} = \frac{V_g}{Z_g + Z_{in}} \quad \text{y} \quad V_{in} = \frac{V_g Z_{in}}{Z_g + Z_{in}}, \text{ necesito calcular}$$

Z_{in} :

$$\beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi f}{v_p} = 11,596$$

CÁLCULO DE Z_{in}

$$Z_{in} \text{ para LT sin pérdidas es } Z_{in} = Z_o \frac{Z_L + jZ_o \tan(\beta l)}{Z_o + jZ_L \tan(\beta l)}. \text{ Sustituyo datos}$$

$$\text{y obtengo que } Z_{in} \text{ es } \boxed{Z_{in} = 9,976 + 1,382i}$$

CÁLCULO I_{in} y V_{in} :

$$I_{in} = \frac{V_g}{Z_g + Z_{in}} = V_g (0,0118 - 0,000191i) \rightarrow I_{in}^* = (0,0118 + 0,000191i) V_g$$

$$V_{in} = \frac{V_g Z_{in}}{Z_g + Z_{in}} = Z_{in} \cdot I_{in} = (0,118 + 0,0144i) V_g$$

CÁLCULO DE V_g

$$0,100 \text{ W} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[(0,118 + 0,0144i) V_g (0,0118 + 0,000191i) V_g] \Leftrightarrow$$

$$0,100 \text{ W} = \frac{1}{2} 0,00139 V_g^2 \Leftrightarrow \boxed{V_g = 11,995 \text{ V} \approx 12 \text{ V}}$$

APARTADO B) POTENCIA QUE SUMINISTRA EL GENERADOR

Sabiendo I_{in} puedo calcular la potencia que da el generador:

$$\text{Con } I_{in}^* = 0,142 + 0,00229i, \text{ y sabiendo que } \boxed{P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V_g I_{in}^*] = 0,85 \text{ W.}}$$

Atun

APARTADO C) V_g mínima si $Z_L = Z_0 = Z_g$ para 100 mW

Como $Z_L = Z_0 = Z_g$, $Z_{in} = Z_0 = 75 \Omega$. Entonces, I_{in} es $I_{in} = \frac{V_g}{Z_g + Z_{in}} \Leftrightarrow$

$$I_{in} = V_g \cdot \frac{1}{150} \quad \text{y} \quad V_{in} = I_{in} \cdot Z_{in} = \frac{75}{150} V_g = \frac{1}{2} V_g.$$

Sabiendo que $P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_{in} I_{in}^*) = 0.1 \text{ W}$, entonces, V_g es:

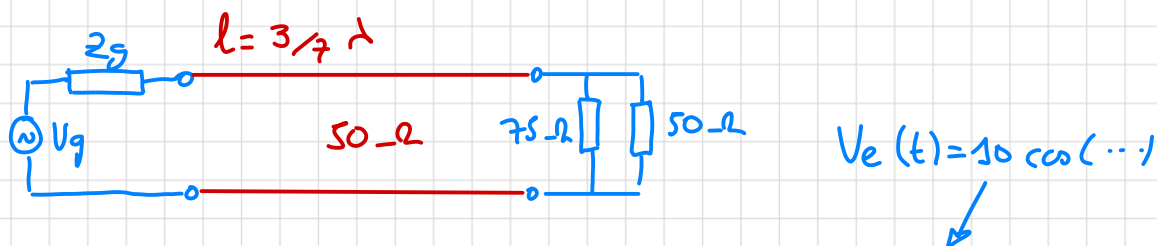
$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V_g \cdot V_g \frac{1}{150} = 0.1 \Leftrightarrow V_g^2 = 150 \cdot 4 \cdot 0.1 \Leftrightarrow \boxed{V_g = 7.746 \text{ V}}$$

APARTADO D) Potencia suministrada

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_g I_{in}^*) = \frac{1}{2} 7.746 \cdot 7.746 \cdot \frac{1}{150} = 0.2 \text{ W} = P$$

11. Una línea con $Z_0 = 50 \Omega$, acaba en dos resistencias de carga en paralelo de 50 y 75 Ω , la tensión al comienzo de línea es $v_e(t) = 10 \cos(6 \times 10^9 t) \text{ V}$, y la longitud de la línea es de 3 séptimos de longitud de onda. ¿Qué potencia promedio se entrega a cada carga?

DATOS



Asumo LT sin pérdidas, $Z_g = Z_0$ y $|V_{in}| = 10 \text{ V}$

CÁLCULO DE POTENCIA SUMINISTRADA A CADA CARGA

1) Necesito saber la impedancia de carga total:

$$Z_L = Z_{L1} \parallel Z_{L2} = \frac{1}{\frac{1}{50} + \frac{1}{75}} = 30 \Omega.$$

2) Como la LT no tiene pérdidas, la potencia que entra en la línea es la misma que llega a la carga, por tanto, $P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_o I_o^*)$.

Sé que $V_o = I_o \cdot Z_0$, y entonces, $P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(I_o I_o^* Z_0)$, que se simplifica a $P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(I_o^2 Z_0)$.

$I_o = I_{in}$ y $Z_0 = Z_{in}$, entonces:

Ateneo

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)}, \text{ donde } \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ y } l = \frac{7}{3}l, \text{ entonces,}$$

$$\beta l = \frac{6}{7}\pi, \text{ entonces:}$$

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\frac{6}{7}\pi)}{Z_0 + jZ_L \tan(\frac{6}{7}\pi)} = (36,110 - 14,223j) \Omega$$

$$\text{Ahora, } I_{in} = \frac{|V_{in}|}{|Z_{in}|} = \frac{10}{36,857} = 0,271 \text{ A}$$

$$\text{Con eso, calculo que } P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(|I_{in}|^2 \cdot Z_{in}) = 1,25 \text{ W} = P$$

3) Esta es la potencia total que suministra la fuente. Ahora, tenemos que repartirla a cada carga:

$$P_{TOTAL} = P_{CARGA 1 (50 \Omega)} + P_{CARGA 2 (75 \Omega)}. \text{ Por } T^2 \text{ de Circuitos, } P = \frac{V^2}{R},$$

La tensión a través de las cargas es la misma, entonces:

$$P_{TOTAL} = \frac{|V_{in}|^2}{30}, \quad P_{50} = \frac{|V_{in}|^2}{50} \text{ y } P_{75} = \frac{|V_{in}|^2}{75}.$$

$$\text{La proporción entre } P_{TOTAL} \text{ y } P_{50} \text{ es: } \frac{P_{50}}{P_{TOTAL}} = \frac{\frac{|V_{in}|^2}{50}}{\frac{|V_{in}|^2}{30}} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0,6,$$

es decir, la resistencia de 50Ω disipa el 60% del circuito, y por tanto, la otra un 40%:

$$P_{50} = 0,6 \cdot P_{TOTAL} = 0,75 \text{ W}$$

$$P_{75} = 0,4 \cdot P_{TOTAL} = 0,5 \text{ W}$$

12. Una línea de impedancia característica de 75Ω y $v_p = 0,8c$ es acabada en corto y se mide un máximo de tensión a 25cm del corto de 7.5 mV. A continuación se sustituye el corto por una carga desconocida y se detecta un máximo de 12 mV a 5 cm de la carga y un mínimo de 5 mV en una posición desconocida. Hallar la impedancia de carga. ¿Cuál es la frecuencia de trabajo?

DATOS

$$Z_0 = 75 \Omega$$

[ASUMO LC SIN PÉRDIDAS]

Atun

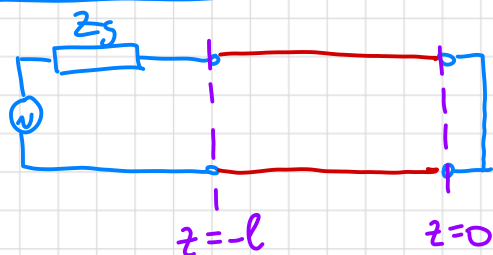
$$V_p = 0.8c$$

* en corto, $V_{\max}$ de 7.5 mV en $z = -0.125$

* cuando $z_L > 0$, $V_{\max}$ de 12 mV en $z = -0.05$ y $V_{\min}$ de 5 mV en $z = ?$

Calcular z_L y f .

PRIMER CASO



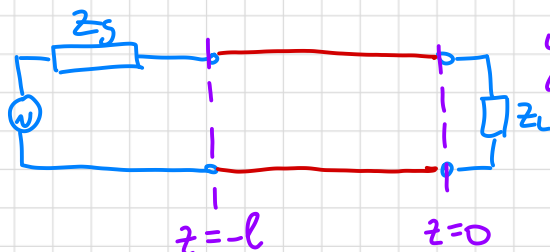
Dado que la Lt está en corto, en $z = 0$ tenemos un mínimo. La distancia entre un máximo y un mínimo es $\frac{\lambda}{4}$, entonces, $0.125 = \frac{\lambda}{4}$. Despejando $\lambda = 1 \text{ m}$.

Con λ calculada, despejo β y luego la frecuencia f :

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v_p} \Leftrightarrow \frac{2\pi v_p}{2\pi \lambda} = f = \frac{v_p}{\lambda} = 240 \text{ MHz.} \leftarrow \text{frecuencia de trabajo.}$$

$$\hookrightarrow \beta = 2\pi$$

SEGUNDO CASO



Me dan $V_{\max}$ y $V_{\min}$, y puedo sacar la SWR, y consecuentemente el coef. de Reflexión:

$$S = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} \Rightarrow |\Gamma_L| = 0.412.$$

Podría calcular z_L usando $\Gamma_L = \frac{z_L - z_0}{z_L + z_0}$, pero, tengo solo el módulo de Γ_L , no Γ_L en sí.

Para calcular la fase de Γ_L , sé que hay un máximo en $z = -0.05$, luego, usando la siguiente relación, saco θ_{Γ_L} :

$$\theta_{\Gamma_L} = -2\beta z_{\max} \Leftrightarrow \theta_{\Gamma_L} = \frac{1}{5}\pi$$

$\uparrow$
 $z_{\max} = -0.05$

formula de Euler

Con el módulo y fase, tengo que $\Gamma_L = |\Gamma_L| e^{j\theta_{\Gamma_L}} = |\Gamma_L| (\cos(\theta_{\Gamma_L}) + j\sin(\theta_{\Gamma_L})) =$

$$\Gamma_L = 0.333 + 0.242j$$

Alvaro

Habiendo despejado Γ_L , puedo sacar z_L de $\Gamma_L = \frac{z_L - z_0}{z_L + z_0}$:

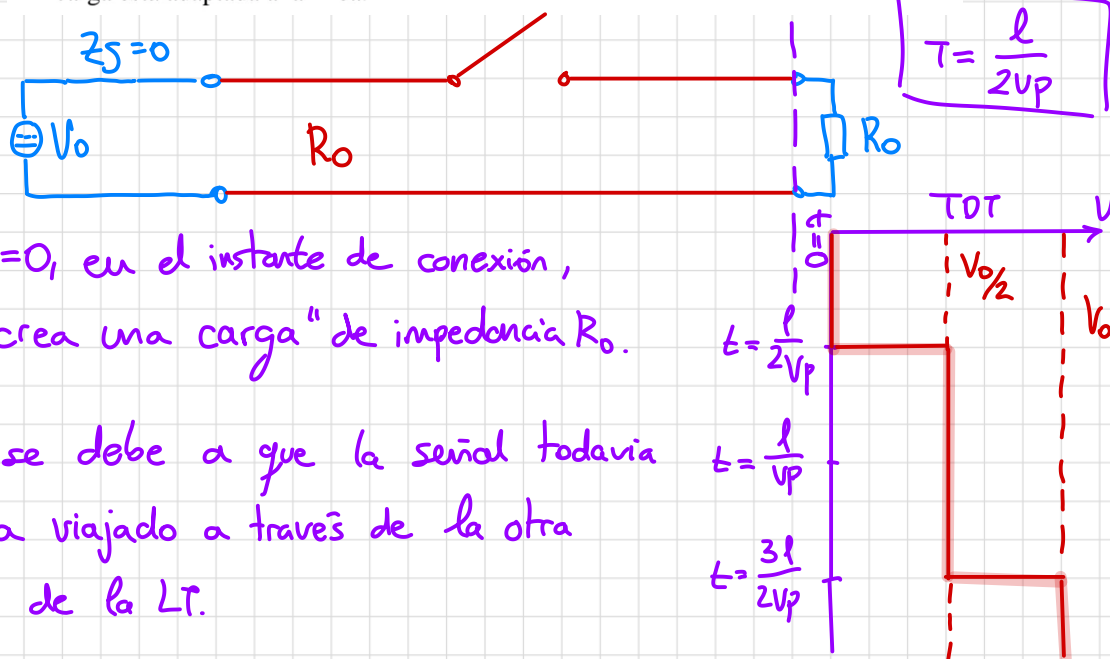
$$\Gamma_L (z_L + z_0) = z_L - z_0 \Leftrightarrow \Gamma_L z_L + \Gamma_L z_0 = z_L - z_0 \Leftrightarrow \Gamma_L z_0 + z_0 = z_L - \Gamma_L z_L \Leftrightarrow$$

$$z_0 (1 + \Gamma_L) = z_L (1 - \Gamma_L) \Leftrightarrow z_0 \left[\frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} \right] = z_L = 123,728 + 72,102i$$

sustituyo todos los datos

13. Un generador de tensión continua V_0 y con resistencia de salida nula se conecta a una carga a través de una línea de transmisión de longitud l , impedancia característica R_0 y velocidad de propagación v_p . En mitad de la línea hay un interruptor en abierto que se cierra en $t=0$. Dibujad la tensión en la carga en función del tiempo sabiendo que la carga está adaptada a la línea.

tiempo en recorrer media L

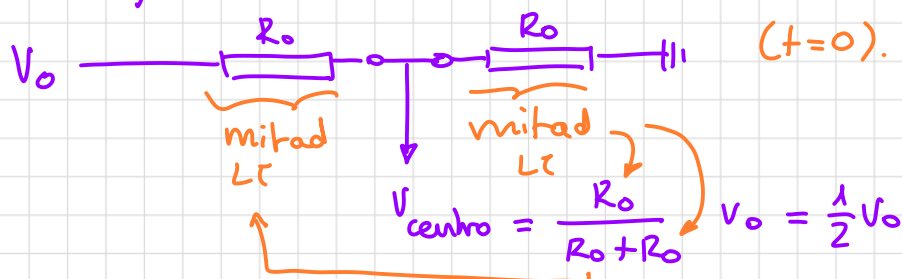


En $t=0$, en el instante de conexión, "se crea una carga" de impedancia R_0 .

Esto se debe a que la señal todavía no ha viajado a través de la otra mitad de la LT.

En ese momento, tenemos que la señal ya recorrió la mitad de la LT afrontando la impedancia característica.

Se da lugar así a un divisor de tensión:



En el momento del "click", se produce una onda viajera de $-V_0/2$ que viaja hacia la fuente. Como $\Gamma_r = \frac{R_0 - R_0}{R_0 + R_0} = -\frac{R_0}{R_0} = -1$, esa onda volverá con amplitud $+V_0/2$.

Esa última viajera habrá recorrido 3 mitades, es decir $t = \frac{3l}{2v_p}$.

14. Se quiere determinar la nitidez en la posición de los máximos y de los mínimos en una onda estacionaria. Para ello suponed que se posee una línea de transmisión con una carga normalizada de $4.2 + j 1.2$, $v_p = c$, frecuencia de trabajo de 300 MHz, y en la que se ha medido un mínimo de 200 mV. Determinar el ancho de la posición del mínimo y del máximo considerando que es el intervalo en el que la medida se aproxima al 90% del valor esperado.

DAIOS

$$Z_L = 4.2 + j1.2 \leftarrow Z_L \text{ normalizado, es decir, } \frac{Z_L}{Z_0}$$

$$v_p = c$$

$$f = 300 \text{ MHz} \quad \left\{ \beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi f}{c} = 2\pi$$

$$V_{\min} = 200 \text{ mV}$$

Piden el ancho de los máximos (cuando $V > 0.9 V_{\max}$) y mínimos (cuando $V < 0.1 V_{\min}$).

Voy a calcular $V_{\max}$, y para eso, necesito Γ_L .

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \text{ si las cargas no están normalizadas, pero, como lo están, } \Gamma_L = \frac{Z_L - 1}{Z_L + 1} = 0.635 - j0.0843i \rightarrow \text{hago el módulo y tengo:}$$

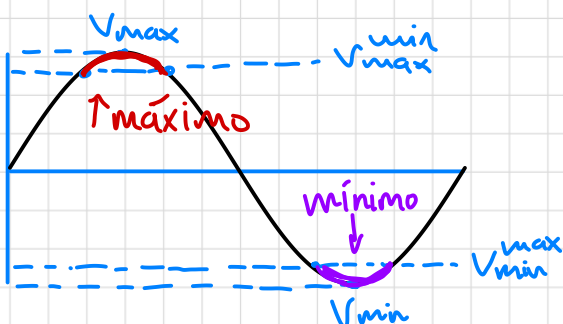
$$|\Gamma_L| = 0.640$$

$$\text{Usando la SWR recupero } V_{\max}: S = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} \Rightarrow V_{\max} = 0.611$$

Conociendo $V_{\max}$, voy a calcular $V_{\min}^{\max}$ a partir del que considero un máximo: $0.9 V_{\max} = V_{\min}^{\max} = 0.820$.

Es decir, cuando la onda supere $V_{\min}^{\max}$ empiezo a considerar un máximo hasta que V vuelva a bajar por debajo de la medida.

El $V_{\min}^{\max}$ empieza a cuando V es un 10% más grande que $V_{\min}$.



$$\text{Para } V_{\min} \text{ tengo } V_{\min}^{\max} = 1.1 V_{\min} = 0.22 \text{ V}$$

CALCULAR ANCHO MÁXIMOS

$$\text{Sabemos que } V_{\max} = |V_0| (1 + |\Gamma_L|) = |V_0| (1 + |\Gamma_L| e^{j\theta_r}), \text{ cuando } \theta_r = 0.$$

Atu

Con esa igualdad en mente, busco θ_r tal que se cumpla:

$$0.9 V_{\max} = |V_0| (1 + |r_L| e^{j\theta_r}).$$

Sustituyendo $V_{\max}$ obtengo:

$$0.9(|V_0| (1 + |r_L|)) = |V_0| (1 + |r_L| e^{j\theta_r}) \Leftrightarrow 0.9(1 + |r_L|) = (1 + |r_L| e^{j\theta_r})$$

y usando la fórmula de Euler, obtengo:

$$1.476 = 1 + 0.64 \cos \theta_r + 0.64 \operatorname{sen} \theta_r$$

Para quitar la parte imaginaria, calculo el módulo del número complejo:

$$1.476^2 = (1 + 0.64 \cos \theta_r)^2 + (0.64 \operatorname{sen} \theta_r)^2 \Leftrightarrow$$

saco factor común 0.64^2

$$1.476^2 = 1 + 0.64^2 \cos^2 \theta_r + 2(0.64) \cos \theta_r + 0.64^2 \operatorname{sen}^2 \theta_r \Leftrightarrow$$

$$1.476^2 = 1 + 2(0.64) \cos \theta_r + 0.64^2 (\cos^2 \theta_r + \operatorname{sen}^2 \theta_r) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1.476^2 - 1 - 0.64^2}{2(0.64)} = \cos \theta_r \Leftrightarrow \boxed{\theta_r = 0.926 \text{ rad}}.$$

Como el coseno es una función par $\cos \theta_r = \cos -\theta_r$. Habremos obtenido así los valores de θ_r , cuando $\theta_r > 0$ hablamos del punto a la derecha del máximo, y $\theta_r < 0$ del de la izquierda.

$$\frac{\theta_r}{-2\beta} = z_{\text{derecha}}$$

Usando la relación $\theta_r = -2\beta z_{\text{derecha}}$ saco la distancia del pico a la derecha: $z_{\text{derecha}} = 0.0737$. Como una onda es simétrica, la distancia del centro a la izquierda es igual, por tanto, el ancho del máximo es 0.1474 m .

CALCULO ANCHO DEL MÍNIMO

Hacemos lo mismo, solo que: $V_{\min} = |V_0| (1 - |r_L|)$ y

$$1.1 V_{\min} = |V_0| (1 - |r_L| e^{j\theta_r}).$$

Aplico Euler

$$\text{Despejo que } 1.1(1 - |r_L|) = 1 - |r_L| e^{j\theta_r} \Leftrightarrow 0.396 = 1 - |r_L| (\cos \theta_r + i \operatorname{sen} \theta_r)$$

$$\Leftrightarrow 0.396^2 = 1 + |r_L|^2 \cos^2 \theta_r - 2|r_L| \cos \theta_r + |r_L|^2 \operatorname{sen}^2 \theta_r \Leftrightarrow$$

$$0.396^2 = 1 - 2|r_L| \cos \theta_r + |r_L|^2 \Leftrightarrow \cos \theta_r = \frac{0.396^2 - 1 - 0.64^2}{-2(0.64)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta_r = 0.207 \text{ rad}}$$

Entonces z_{derecha} será -0.0165 m . El ancho del mínimo es 0.0329 m .

PROPORCIÓN

$$\frac{\text{Ancho máx}}{\text{Ancho mín}} = \frac{14,74\text{cm}}{3,29\text{cm}} = 4,48$$

Es decir, el ancho del máximo es 4,48 veces más grande que el mínimo.