

Capítulo 4

Líneas de Transmisión

Este capítulo se basa en la estructura y el rigor de la obra *“Electromagnetic Fields for Engineers”* de Daniel S. Elliot [1]. Se recomienda la consulta de la obra original para un estudio exhaustivo.

En el capítulo anterior hemos abordado el estudio matemático de ondas que se propagan libremente a través de un medio. Ahora, vamos a dirigir las ondas a través de las llamadas **líneas de transmisión** (de ahora en adelante abreviado como LT), dos o mas conductores que se extienden a lo largo de un eje, como los cables coaxiales que nos permiten transportar la señal recibida por las antenas de la TDT a la televisión o las bandas que se ven en los integrados.

La función primaria de una línea de transmisión es el controlar el transporte eficiente de señales de alta frecuencia de un punto (fuente) a otro (carga), confinando la energía electromagnética en la región dieléctrica entre los conductores.

Consideramos las líneas de transmisión en aquellos en los que las características de las ondas influyen, porque el tiempo de propagación de la señal a lo largo de la línea ya no es despreciable respecto al periodo de la señal, es decir, cuando la longitud L de la línea es un cuarto o mayor que la longitud de onda de la señal senoidal que se propaga a través de esta ($L \geq 1/4\lambda$).

Con esto en mente, la Teoría de Circuitos pierde total validez porque, hasta ahora, hemos asumido que, al ser los circuitos mucho más pequeños que la longitud de ondas de los fenómenos electromagnéticos, los fenómenos eléctricos son instantáneos y que las dimensiones no influyen en su comportamiento. Dicho de otro modo, no consideramos las características de la señal aplicada en los circuitos. [2], [3]

Sobre las demostraciones

Estos apuntes incluyen las demostraciones que aparecen en el libro de Elliot. Aunque en la práctica (y en los exámenes) solemos ir directos a la fórmula final, he incluido el proceso de obtención porque es la única forma de evitar que las ecuaciones parezcan «magia».

Ver de dónde salen las cosas ayuda a conectar la física con las matemáticas. Al final, usaremos la expresión resumida, pero haber entendido el camino nos da la seguridad de saber realmente qué estamos calculando y por qué.

Sección *Carta de Smith* en desarrollo

Todavía estoy trabajando en esta sección. Prefiero tomarme un tiempo para revisar bien los materiales y enlaces externos para asegurarme de que realmente valen la pena antes de recomendártelos.

En cuanto lo tenga listo, cargaré a la carpeta de Wuolah un PDF llamado *Anexo T4 - Carta de Smith.pdf*, que contendrá toda la información necesaria para entender y aprender a usar esta herramienta.

Además, en la carpeta compartida enlazada en mi biografía, habrá una copia de seguridad de todos estos recursos para garantizar su preservación.

Gracias por la paciencia.

4.1. Características de las LT

Independientemente del tipo de línea que estudiemos, todas comparten una serie de características comunes:

- Los campos eléctricos y magnéticos se encuentran principalmente en la región entre los conductores, y son ortogonales uno respecto al otro,
- Las líneas del campo eléctrico son perpendiculares a las superficies de los conductores y van desde la fuente hasta la carga,
- los campos magnéticos son tangenciales a las superficies del conductor,
- las magnitudes de los campos habitualmente tienen la misma variación espacial,
- las cargas y corrientes se encuentran distribuidas a lo largo del conductor,

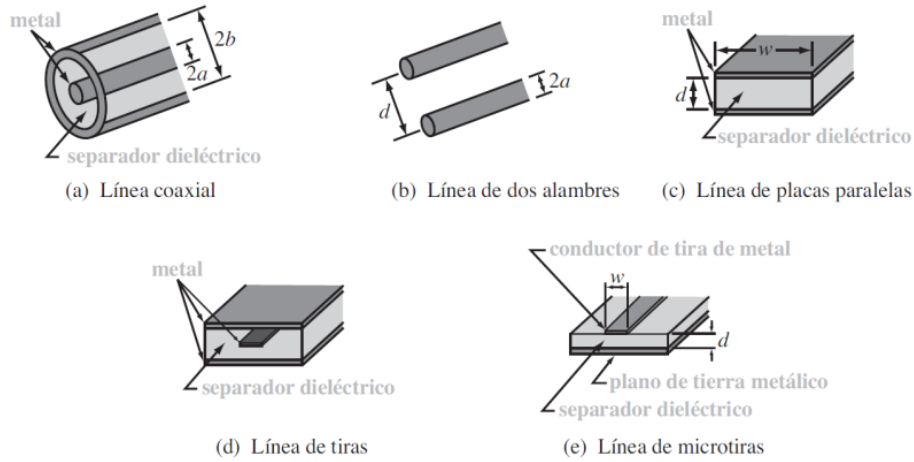


Figura 4.1: Líneas de transmisión más comunes. F. T. Ulaby, Fundamentos de aplicaciones en electromagnetismo, 5ª Ed., Prentice-Hall, Inc., 2007. Fuente: [4]

- las líneas de campo empiezan en el polo positivo y terminan en el polo negativo del otro conductor,
- y las corrientes de los conductores se asocian con el campo magnético tangencial a la superficie.

4.2. Modelo simple de LT

Son varios los tipos de LT que podemos encontrar. Los más comunes son las líneas de transformación co-axial o la de dos alambres. (Ver figura 4.1). Aunque la menos usada sea la de planos paralelos, presenta una geometría sencilla, perfecta para describir matemáticamente los fenómenos físicos de las LT, que luego extrapolaremos al resto de LT.

En los planos paralelos, los campos eléctricos son verticales y los magnéticos horizontales, formando una región uniforme entre los conductores. Es importante denotar que el ancho de la LT de planos paralelos es mucho mayor que la distancia entre ambos. De ahora en adelante, me referiré a estos como LTPP.

No obstante, Elliot, antes de introducir esas expresiones, ya presenta una tabla (ver tabla 4.2) en el que agrupa los parámetros de las líneas de transmisión (4.1a), (4.1b) y (4.1c):

En la tabla contemplamos cuatro fenómenos físicos que desarrollaremos a lo largo del tema, pero vamos a definirlos conceptualmente:

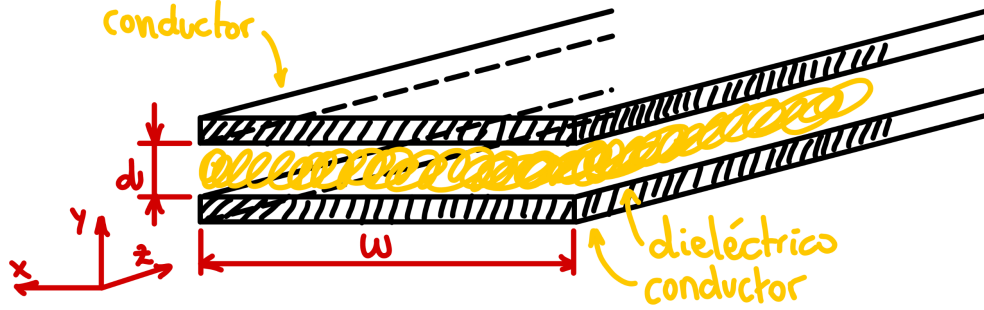


Figura 4.2: Líneas de planos paralelos.

	Co-axial	Dos alambres	Placas paralelas	Unidad
C'	$\frac{2\pi\epsilon'}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\epsilon'}{\cosh^{-1}(d/2a)}$	$\frac{\epsilon'w}{d}$	F/m
L'	$\frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$	$\frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1}\left(\frac{d}{2a}\right)$	$\frac{\mu d}{w}$	H/m
R'	$\frac{R_s}{2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$	$2 \left(\frac{R_s}{2\pi a}\right)$	$\frac{2R_s}{w}$	Ω/m
G'	$\frac{2\pi(\sigma_d + \omega\epsilon'')}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi(\sigma_d + \omega\epsilon'')}{\cosh^{-1}(d/2a)}$	$(\sigma_d + \omega\epsilon'')\frac{w}{d}$	S/m

- C' representa la **capacitancia por unidad de longitud**, «se trata de la capacidad de la línea de transmisión para recibir y almacenar energía durante su paso por ella.» [5]
- L' representa la **inductancia por unidad de longitud**: «es la oposición al cambio de corriente de una bobina, que almacena la energía eléctrica dentro del campo electromagnético, afectando la parte superficial de la línea de transmisión.» [5]
- R' representa la **resistencia de la superficie del conductor**, «es la oposición al paso de una corriente eléctrica. En una línea de transmisión, la resistencia es del material frente al paso de las señales electromagnéticas.» [5]
- G' representa la **conductividad del dieléctrico**, «es la capacidad del material empleado en la línea de transmisión para soportar el paso de la señal. Esta propiedad es lo opuesto a la resistencia.» [5]

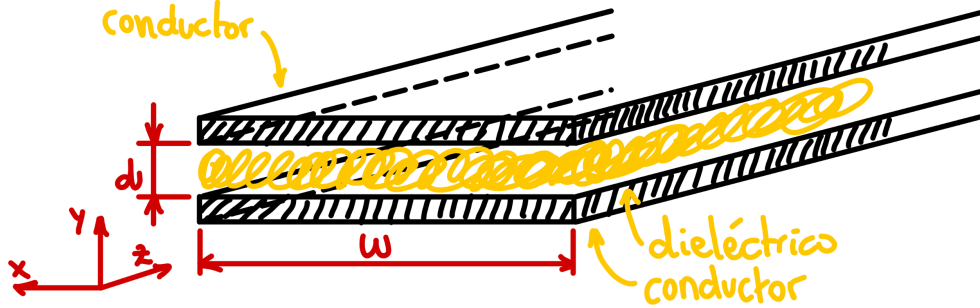


Figura 4.3: Líneas de planos paralelos.

4.3. LT sin pérdidas

Vamos a aplicar a nuestra LTPP (LT de planos paralelos) una diferencia de potencial oscilatoria de amplitud V_0 y frecuencia ω entre los dos conductores al inicio de la LT ($z = 0$). La fuente genera una onda que viaja en dirección $+z$.

Estas ondas deben cumplir la ecuación de ondas que vimos en el capítulo anterior y las condiciones de contorno específicas en las superficies de los conductores.

Como los conductores soportan cargas y corrientes, en LT sin pérdidas, dentro de las superficies de los dos conductores, estas son cuantificadas a través de la densidad de corriente superficial $\mathbf{J}_s$ y la densidad de carga ρ_s .

Para el caso de la LTPP, con los conductores extendiéndose en la dirección z , y las corrientes apuntando en la dirección $\pm z$, las condiciones que han de cumplirse en las superficies de ambos conductores, en $y = 0$ e $y = d$, son:

■ CAMPO ELÉCTRICO

- $E_t = 0 \rightarrow E_x = E_z = 0$
- $D_n = \rho_s \rightarrow E_y = -\rho_s/\varepsilon$

con ρ_s siendo la densidad de carga. Para el campo eléctrico $\mathbf{E}$, se debe cumplir que la componente tangencial ($E_t = 0$) sea nula, obligando a que las líneas del campo sean siempre normales (perpendiculares) a la superficie del conductor, siendo su magnitud dictada por la densidad de carga superficial (ρ_s).

■ CAMPO MAGNÉTICO

- $H_t = J_s \rightarrow H_x = J_{s,z}$ y $H_z = 0$
- $B_n = 0 \rightarrow H_y = 0$

con $J_{s,z}$ la densidad de corriente en el conductor superior. Para el campo magnético, la Ley de Gauss para el magnetismo exige que la componente normal (B_n) sea nula, haciendo que el campo $\mathbf{H}$ sea exclusivamente tangencial a la superficie. La componente tangencial (H_t) es generada por la densidad de corriente superficial ($\mathbf{J}_s$) que fluye a lo largo del conductor.

Como los campos $\tilde{\mathbf{E}}$ y $\tilde{\mathbf{H}}$ han de cumplir la ecuación de onda, esperamos que la dependencia respecto a z de estas cantidades deberían ser de la forma $e^{-\gamma z}$, donde $\gamma = \alpha + j\beta$. Al estar en medios sin pérdidas $\alpha = 0$, por tanto, la expresión se simplifica en $e^{-j\beta z}$.

Una solución que cumple estas condiciones, escritas en forma fasorial, son:

$$\tilde{\mathbf{E}}(z) = -\mathbf{a}_y E_0 e^{j\beta z}$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(z) = \mathbf{a}_x \frac{E_0}{\eta} e^{j\beta z}$$

con $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ siendo la impedancia del medio dieléctrico entre ambos conductores.

Sabemos que las líneas de campo eléctrico originan en las cargas positivas de la superficie de un conductor y terminan en las negativas del otro conductor. La densidad de carga dentro de la superficie del conductor superior lo podemos escribir como:

$$\tilde{\rho}_{s,u}(z) = -\varepsilon \tilde{E}_y(z) = \varepsilon E_0 e^{-j\beta z}$$

y dentro de la superficie del conductor inferior:

$$\tilde{\rho}_{s,b}(z) = +\varepsilon \tilde{E}_y(z) = -\varepsilon E_0 e^{-j\beta z}$$

La densidad de corriente de ambas placas las podemos obtener aplicando las condiciones de contorno para el campo magnético $\tilde{\mathbf{H}}$ ($\mathbf{a}_n 2 \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)$), tenemos que la densidad de carga dentro de la superficie del conductor superior es:

$$\tilde{\mathbf{J}}_{s,u}(z) = -\mathbf{a}_y \times \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{a}_z \frac{E_0}{\eta} e^{-j\beta z}$$

y en la inferior:

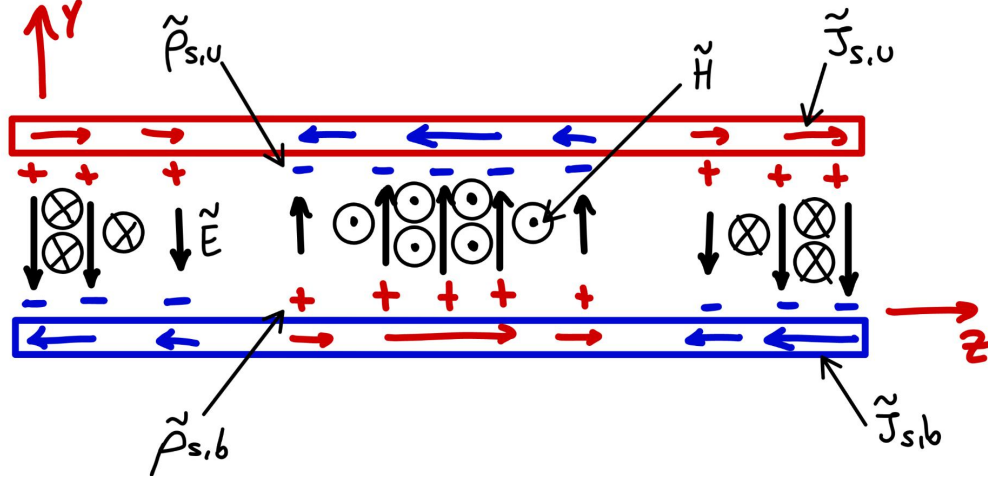


Figura 4.4: LT de placas paralelas. Las líneas de campo eléctrico se forman entre las placas.

$$\tilde{\mathbf{J}}_{s,u}(z) = +\mathbf{a}_y \times \tilde{\mathbf{H}} = -\mathbf{a}_z \frac{E_0}{\eta} e^{-j\beta z}$$

En la figura (4.4) vemos representadas estas cantidades, asumiendo la variación senoidal en función de t y z .

4.3.1. Diferencia de potencial y corriente

Ahora vamos a calcular la diferencia de potencial $v(z, t)$ entre ambas placas y la corriente $i(z, t)$ portada por los conductores. La relación entre ambos la podemos obtener con las leyes de Maxwell para medios simples y expresiones de campo en forma fasorial.

Partiendo de la Ley de Faraday $\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\tilde{\mathbf{H}}$ y aplicándolo a nuestra LTPP, tenemos que:

$$\frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} = j\omega\mu\tilde{H}_x$$

dado que $\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}$ es:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \tilde{E}_y(z) & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{a}_x \frac{\partial \tilde{E}_y(z)}{\partial z}$$

Ahora, la diferencia de potencial entre ambas placas viene dado por:

$$\tilde{V}(z) = - \int_0^d \tilde{E}_y(z) dy = -\tilde{E}_y(z)d$$

de donde saco que $\tilde{E}_y(z) = -\tilde{V}(z)/d$, y la corriente portada por las placas viene dado por:

$$\tilde{I}(z) = \int_0^w \tilde{J}_{s,u,z}(z) dx = \tilde{H}_x(z)w$$

de donde despejo $\tilde{H}_x = \tilde{I}(z)/w$, y aplicando los despejes a la expresión derivada de la ley de Faraday $\frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} = j\omega\mu\tilde{H}_x$, tenemos que:

$$\frac{d\tilde{V}}{dz} = -j\omega\left(\frac{\mu d}{w}\right)\tilde{I}(z)$$

El término entre paréntesis es la inductancia por unidad de longitud para LTPP, así que, generalizando, tenemos que:

$$\frac{d\tilde{V}}{dz} = -j\omega L' \tilde{I}(z)$$

También podemos obtener esta relación con la ley de Ampère ($\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\tilde{\mathbf{E}}$):

$$\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} = j\omega\varepsilon\tilde{E}_y$$

dado que $\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}$ es:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \tilde{H}_y(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{a}_y \frac{\partial \tilde{H}_x(z)}{\partial z}$$

Sustituyendo con $\tilde{E}_y(z) = -\tilde{V}(z)/d$ y $\tilde{H}_x = \tilde{I}(z)/w$ tenemos que:

$$\frac{d\tilde{I}(z)}{dz} = -j\omega\left(\frac{\varepsilon w}{d}\right)\tilde{V}(z)$$

y sabiendo que el término entre paréntesis es la capacitancia por unidad de longitud C' para LTPP, generalizando obtenemos que:

$$\frac{d\tilde{I}(z)}{dz} = -j\omega C' \tilde{V}(z)$$

Es decir, que la relación entre la diferencia de potencial y la corriente es, o bien:

$$\frac{d\tilde{V}(z)}{dz} = -j\omega L' \tilde{I}(z)$$

o bien:

$$\frac{d\tilde{I}(z)}{dz} = -j\omega C' \tilde{V}(z)$$

Tengamos en cuenta que solo hemos analizado estos parámetros para LTPP. No obstante, si hacemos el mismo análisis para cualquier LT, obtendríamos estas relaciones, siempre que escojamos las L' y C' correspondientes de esa LT.

Ahora, derivando ambas partes de $\frac{d\tilde{V}(z)}{dz} = -j\omega L' \tilde{I}(z)$, realizando las sustituciones oportunas, y simplificando, obtenemos que:

$$\frac{d^2\tilde{V}(z)}{dz^2} + \omega^2 L' C' \tilde{V}(z) = 0$$

Repitiendo el mismo proceso para $\frac{d\tilde{I}(z)}{dz} = -j\omega C' \tilde{V}(z)$, obtengo:

$$\frac{d^2\tilde{I}(z)}{dz^2} + \omega^2 L' C' \tilde{I}(z) = 0$$

Las soluciones de estas ecuaciones de onda nos dan:

$$\tilde{V}(z) = V_0 e^{-j\beta z}$$

y

$$\tilde{I}(z) = I_0 e^{-j\beta z}$$

Estas soluciones se pueden verificar sustituyendo en la ecuación de ondas apropiada:

$$[(-j\beta^2) + \omega^2 L' C'] \tilde{V}(z) = 0$$

que se verifica siempre que $\beta = \omega \sqrt{L' C'}$.

Sustituyendo L' y C' para LTPP tenemos que $\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$, recuperando la β que vimos en ondas planas. Recuerda que β está relacionada con la longitud de onda λ $\beta = 2\pi/\lambda$.

4.3.2. Impedancia característica

Ahora, introduciremos un nuevo parámetro definido como la **impedancia característica** de la línea:

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0}$$

La relación entre la impedancia característica, la capacitancia por unidad de longitud, la inductancia por unidad de longitud y *beta* la obtenemos derivando la ecuación de onda $\tilde{V}(z) = V_0 e^{-j\beta z}$:

$$\frac{d}{dz} \tilde{V}(z) = -j\beta V_0 e^{-j\beta z}$$

pero sabemos también que $\frac{d\tilde{V}}{dz}$ es igual a:

$$\frac{d\tilde{V}}{dz} = -j\omega L' \tilde{I}(z)$$

Entonces, igualando ambas expresiones, y simplificando tenemos que:

$$\beta V_0 = \omega L' I_0$$

y reordenando términos de tal modo que tengo $Z_0 = V_0/I_0$ consigo:

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \frac{\omega L'}{\beta} = \frac{\omega L'}{\omega \sqrt{L' C'}}$$

y simplificando obtenemos que:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Para LTPP, $Z_0 = \eta_w$.

4.3.3. Velocidad de propagación

Ahora, obtengamos la expresión de la velocidad de propagación. Sabiendo que $v_p = \frac{\omega}{\beta}$, con $\beta = \omega \sqrt{L' C'}$ obtenemos que:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$$

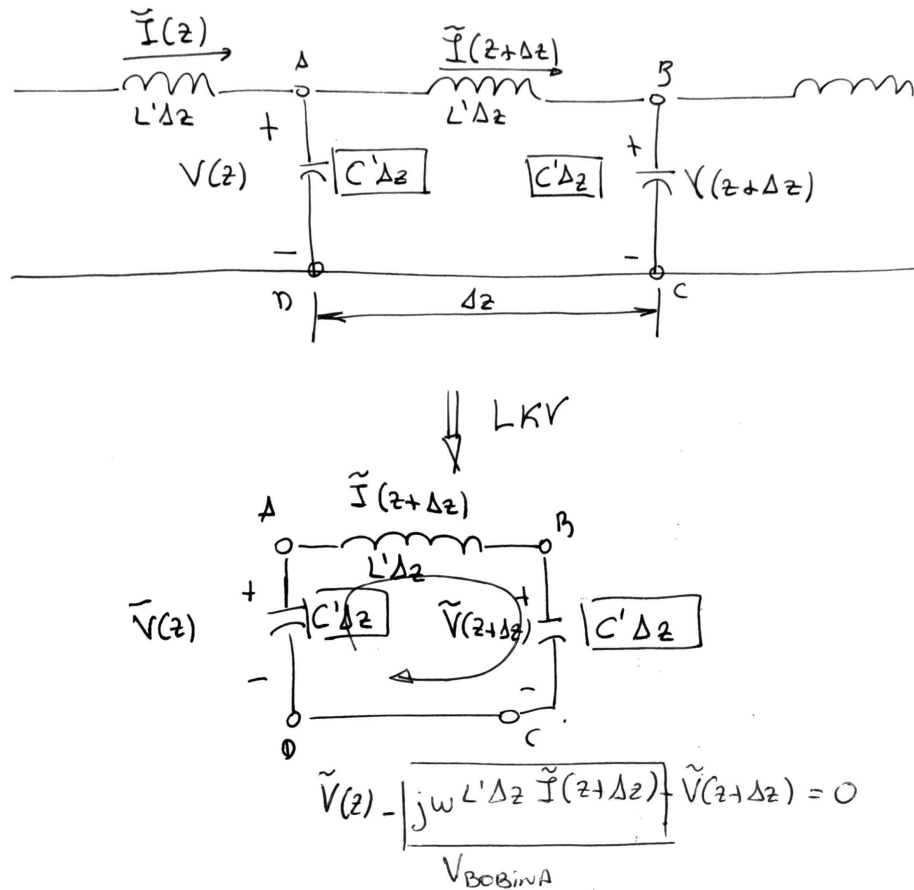


Figura 4.5: Modelo de una LT como una escalera infinita de series de bobinas de inductancia $L'\Delta z$ y condensadores paralelos de capacitancia $C'\Delta z$, donde Δz es la longitud de un segmento de la LT. Figura de elaboración propia basada en la Figura 9.4 de la obra de Elliot.

4.3.4. Derivación alternativa de las expresiones de $\tilde{V}(z)$ e $\tilde{I}(z)$

Partiendo del modelo de la figura (4.5), que es una escalera infinitamente larga construida por bobinas en línea en paralelo con uno de los conductores de la LT y con condensadores entre ambos conductores.

Por cada segmento de longitud Δz , la inductancia de cada bobina es $L'\Delta z$ y la capacitancia de cada condensador es $C'\Delta z$. Usando teoría de análisis de circuitos lineales, aplicando LVK (Ley de Kirchoff de la Tensión) para la malla central, tenemos que:

$$\tilde{V}(z) - j\omega L'\Delta z \tilde{I}(z + \Delta z) - \tilde{V}(z + \Delta z) = 0$$

Si agrupo los terminos de la tension por un lado y dividiendo entre Δz tenemos que:

$$\frac{\tilde{V}(z + \Delta z) - \tilde{V}(z)}{\Delta z} = -j\omega L' \tilde{I}(z + \Delta z)$$

y tomando $\Delta z \rightarrow 0$,

$$\frac{d\tilde{V}(z)}{dz} = -j\omega L' \tilde{I}(z)$$

Por otro lado, aplicando LCK (Ley Kirchoff de las Corrientes) al nodo «A», sumando las corrientes que entran al nodo,

$$\tilde{I}(z) - j\omega C'\Delta z \tilde{V}(z) - \tilde{I}(z + \Delta z) = 0$$

agrupando las expresiones de intensidad por un lado y dividiendo entre Δz , y tomando el límite $\Delta z \rightarrow 0$, tenemos que:

$$\frac{d\tilde{I}(z)}{dz} = -j\omega C' \tilde{V}(z)$$

Llegamos a las mismas expresiones para $\tilde{V}(z)$ e $\tilde{I}(z)$ que antes. Nos ha interesado ver este modelo ahora mismo para luego poder introducir con mayor facilidad algunos parámetros de las LT con pérdidas. Pero antes de eso, seguimos con...

4.3.5. Potencia transmitida

Finalmente, sabemos que las ondas electromagnéticas portan energía. Integrando la densidad de potencia promediada en el tiempo dada por el

vector de Poynting $\overline{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*$ a lo largo del área de la sección transversal de la LT, obtengo la potencia total transmitida por esta onda.

Para LTPP, esto es:

$$P = \int_s \overline{\mathcal{P}} ds$$

donde $ds = \mathbf{a}_z dxdy$. Usando $\tilde{\mathbf{E}}(z) = \mathbf{a}_y (V_0/d) e^{-j\beta z}$ y $\tilde{\mathbf{H}}(z) = -\mathbf{a}_x (I_0/w) e^{-j\beta z}$, esto se convierte en:

$$P = \int_{y=0}^w \int_{x=0}^d \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{a}_y \frac{V_0}{d} e^{-j\beta z} \times \left(-\mathbf{a}_x \frac{I_0}{w} e^{-j\beta z} \right)^* \right\} \cdot \mathbf{a}_z dxdy$$

que se simplifica - afortunadamente - en:

$$P = \int_{y=0}^w \int_{x=0}^d \frac{1}{2} \left(\frac{V_0}{d} \right) \left(\frac{I_0^*}{w} \right) dxdy$$

Después de integrar obtenemos que:

$$P = \frac{1}{2} V_0 I_0^*$$

El asterisco * representa el complejo conjugado.

4.4. LT con pérdidas

Ahora, vamos a introducir las pérdidas dejando de asumir que la LT tiene un conductor perfecto ($\sigma_c \rightarrow \infty$) y un dieléctrico no absorbente ($\varepsilon'' = 0$, $\sigma_d = 0$) entre los conductores.

4.4.1. Resistencia por unidad de longitud

Vamos a partir de la densidad de potencia absorbida por la superficie del conductor, concepto que introducimos el tema anterior, para introducir la resistencia por unidad de longitud (la resistencia del conductor):

$$\overline{P_s^{abs}} = \frac{1}{2} |\tilde{J}_s|^2 R_s$$

El parámetro R_s es igual a $R_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma_c}} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \sigma_c}}$,

y, la densidad de corriente $\tilde{J}_s$, para LTPP es igual a $\tilde{J}_s = I/w$.

Para obtener la cantidad de potencia perdida por unidad de longitud de la LT, integramos $\overline{P_s^{abs}}$, obteniendo:

$$P' = 2 \int_0^w \overline{P_s^{abs}} dx = 2w \frac{1}{2} \left| \frac{\tilde{I}}{w} \right| R_s = \frac{1}{2} |\tilde{I}|^2 \left(\frac{2R_s}{w} \right)$$

Sabiendo que la potencia disipada por una resistencia con una resistencia R cuando una corriente senoidal de amplitud I pasa a través de este es $P = (1/2)I^2R$, identificamos que el término que hay entre paréntesis es la **resistencia por unidad de longitud**:

$$R' = \frac{2R_s}{w}$$

para LTPP (la misma expresión que en la tabla 4.2).

4.4.2. Conductancia por unidad de longitud

Otra mecanismo de pérdidas en las LT son provocadas por la absorción del material dieléctrico entre ambos conductores. Sabemos del tema anterior que la tasa a la cual los campos realizan trabajo, por unidad de volumen, en las cargas de un medio es:

$$\overline{P_v^{abs}} = \frac{1}{2}(\sigma + \omega\varepsilon'')|\tilde{\mathbf{E}}|^2$$

Dado que el campo es uniforme en la región entre ambas placas, la pérdida de potencia por unidad de longitud Δz es:

$$P' = \int_0^w \int_0^d \overline{P_v^{abs}} dx dy = \frac{1}{2}(\sigma_d + \varepsilon''\omega) wd |\tilde{\mathbf{E}}|^2$$

y como $\tilde{E} = \tilde{V}/d$, tenemos que:

$$P = \frac{1}{2} \left[\frac{(\sigma_d + \varepsilon''\omega)w}{d} \right] |\tilde{V}|^2$$

Siendo el término dentro de los corchetes la **conductancia por unidad de longitud** para la LTPP:

$$G' = \frac{(\sigma_d + \varepsilon''\omega)w}{d}$$

Volvemos al modelo de circuito de una LT añadiendo las pérdidas. La impedancia de las resistencias paralelas a los condensadores, llamados *resistencias de derivación*, es $G'\Delta z$, y las que se encuentran en serie a las bobinas $R'\Delta z$.

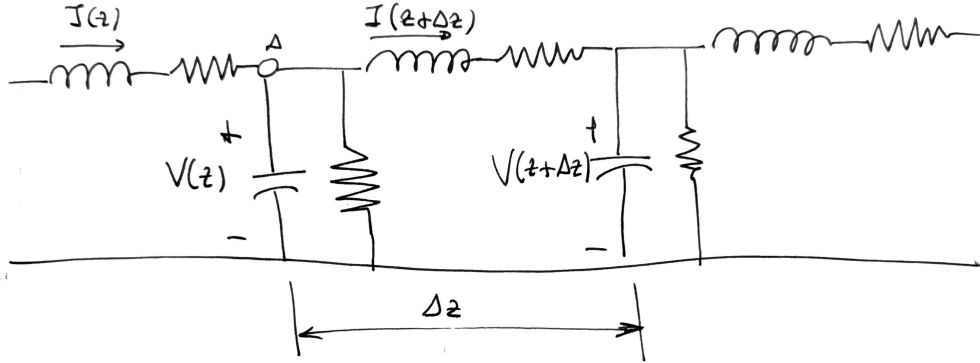


Figura 4.6: Figura 4.5, pero ahora, añadimos las pérdidas a través de resistencias de valor $R'\Delta z$. Figura de elaboración propia basada en la Figura 9.4 de la obra de Elliot.

4.4.3. Constante de propagación, atenuación y fase

La impedancia combinada de la bobina y la resistencia es $(R' + j\omega L')\Delta z$, y la conductancia de la combinación de un capacitor y la resistencia de derivación es $(G' + j\omega C')\Delta z$.

Aplicando LKV a la malla central tenemos:

$$\tilde{V}(z) - [R' + j\omega L'] \Delta z \tilde{I}(z + \Delta z) + \tilde{V}(z + \Delta z) = 0$$

aplicando el límite $\Delta z \rightarrow 0$ nos da:

$$\frac{d\tilde{V}(z)}{dz} = -[R' + j\omega L'] \tilde{I}(z)$$

Aplicando LCK en el nodo A, tenemos que:

$$\tilde{I}(z) - [G' + j\omega C'] \Delta z \tilde{V}(z) - \tilde{I}(z + \Delta z) = 0$$

que nos da:

$$\frac{d\tilde{I}(z)}{dz} = -[G' + j\omega C'] \tilde{V}(z)$$

Con esto podemos desarrollar la ecuación de ondas. Tomaré la expresión $\frac{d\tilde{V}(z)}{dz} = -[R' + j\omega L'] \tilde{I}(z)$ y la derivaré en ambos lados respecto a z :

$$\frac{d\tilde{V}(z)}{dz} = -[R' + j\omega L'] \frac{d\tilde{I}(z)}{dz}$$

reemplazo $\frac{d\tilde{I}(z)}{dz}$ con $-[G' + j\omega C'] \tilde{V}(z)$ y tenemos que:

$$\frac{d\tilde{V}(z)}{dz} = [R' + j\omega L'] [G' + j\omega C'] \tilde{V}(z)$$

La ecuación la puedo reescribir como:

$$\frac{d^2\tilde{V}(z)}{dz^2} - \gamma^2 \tilde{V}(z) = 0$$

donde γ es:

$$\gamma = \sqrt{[R' + j\omega L'] [G' + j\omega C']}$$

La solución de la ecuación $\frac{d^2\tilde{V}(z)}{dz^2} - \gamma^2 \tilde{V}(z) = 0$ es:

$$\tilde{V}(z) = V_0 e^{-\gamma z} = V_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

donde V_0 es la amplitud de la tensión en $z = 0$. En la segunda igualdad, γ se separa en su parte real α e imaginaria β ($\gamma = \alpha + j\beta$), es decir:

$$\alpha = \Re \left\{ \sqrt{[R' + j\omega L'] [G' + j\omega C']} \right\}$$

$$\beta = \Im \left\{ \sqrt{[R' + j\omega L'] [G' + j\omega C']} \right\}$$

γ se define como la **constante de propagación**, α como la **constante de atenuación**, β es la **constante de fase**.

De forma similiar podemos obtener la ecuación de onda para la corriente $\tilde{I}(z)$ desarrollando:

$$\frac{d^2\tilde{I}(z)}{dz^2} - \gamma^2 \tilde{I}(z) = 0$$

cuya solución es:

$$\tilde{I}(z) = I_0 e^{-\gamma z}$$

4.4.4. Impedancia característica de la LT

Usando las soluciones de las ecuaciones de onda de la tensión $\tilde{V}(z)$ y la corriente $\tilde{I}(z)$ en una línea de transmisión con pérdidas, puedo obtener la **impedancia característica Z_0 de la LT**.

Derivando la ecuación de onda $\tilde{V}(z)$ tenemos que:

$$\frac{d\tilde{V}(z)}{dz} = -\gamma V_0 e^{-\gamma z}$$

e igualándolo con la expresión $\frac{d\tilde{V}(z)}{dz} = -[R' + j\omega L'] \tilde{I}(z)$ y sustituyendo $\tilde{I}(z) = I_0 e^{-\gamma z}$ tenemos que:

$$\gamma V_0 e^{-\gamma z} = [R' + j\omega L'] I_0 e^{-\gamma z}$$

sabiendo que $Z_0 = \frac{V_0}{I_0}$ (*Ley de Ohm*), obtenemos que:

$$Z_0 = \frac{R' + j\omega L'}{\gamma}$$

y con la definición de γ tenemos que:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

Curiosidad

Como Z_0 denota la relación entre la tensión y la corriente, su magnitud es $Z_0 = |V_0|/|I_0|$ y su fase es $e^{j(\phi_v - \phi_i)}$, es decir, que la fase de la impedancia característica compleja es la diferencia de fase entre las ondas de tensión y corriente.

4.4.5. Velocidad de la onda

Para la velocidad de fase, la obtendremos de la expresión no fasorial del campo eléctrico $v(z, t) = \Re [|V_0| e^{j\theta_v} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}] = |V_0| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta_v)$.

Si tenemos que en t_1 z_1 está en su máximo, y en t_2 z_2 también, entonces

$$\omega t_1 - \beta z_1 = \omega t_2 - \beta z_2$$

es decir, que en tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, para mantenernos en el mismo punto o sitio en la onda, nos habremos desplazado una distancia $\Delta z = z_2 - z_1$, pudiendo así definir la velocidad de fase como:

$$v_p = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta}$$

La longitud de onda λ de la onda a una frecuencia ω mantiene estrecha relación con la constante β : $\lambda = 2\pi/\beta$.

4.4.6. Potencia transferida por la onda electromagnética

Al final de la sección anterior derivamos del vector de Poynting una expresión para la potencia transmitida escrita en términos de la tensión $\tilde{V}(z)$ y la corriente $\tilde{I}(z)$. A dicha expresión hemos tenido que hacerle una ligera modificación:

$$P = \frac{1}{2} \Re [V_0 I_0^*]$$

Nos quedamos con la parte real de dicha expresión puesto que la imaginaria computa la potencia reactiva.

Ahora, usando las soluciones de onda para $\tilde{V}(z)$ y $\tilde{I}(z)$, tenemos que la potencia transmitida es:

$$P(z) = \frac{1}{2} \Re \left[V_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} (I_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z})^* \right] = \frac{1}{2} V_0 I_0^* e^{-2\alpha z}$$

Podemos observar que la potencia decae a medida que la onda viaja a través de la línea de transmisión con un factor $e^{-2\alpha z}$. Esto implica que la tasa de atenuación de la potencia es el doble que la de la amplitud de la tensión (o del campo eléctrico), que varía según $e^{-\alpha z}$.

4.5. Ondas estacionarias

Partiendo de las ecuaciones de onda para la tensión y la corriente que hemos visto en la sección anterior, podemos construir las expresiones matemáticas que describen con precisión el comportamiento de las ondas estacionarias.

Vamos a imaginar una LT infinita a lo largo del eje z , que alberga, al mismo tiempo, una onda electromagnética que se propaga en dirección y sentido z positivo y negativo. La expresión de onda para la tensión y corriente propagándose en z positivo es:

$$\tilde{V}^+(z) = V_o^+ e^{-\gamma z}$$

$$\tilde{I}^+(z) = I_0^+ e^{-\gamma z}$$

mientras que para las ondas que se propagan en sentido contrario es:

$$\tilde{V}^-(z) = V_o^- e^{+\gamma z}$$

$$\tilde{I}^-(z) = I_0^- e^{+\gamma z}$$

Observa que hemos añadido un exponente + y - para referirnos a las amplitudes de las ondas que se propagan hacia +z y -z, y que la diferencia entre ambas expresiones, a parte de las amplitudes, se sitúa en la exponencial.

La solución general de una onda estacionaria tendrá que incluir las ondas que viajan en dirección +z y -z, dando lugar a las siguientes expresiones:

$$\tilde{V}(z) = V_o^+ e^{-\gamma z} + V_o^- e^{+\gamma z}$$

$$\tilde{I}(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{+\gamma z}$$

Cada onda que conforma la onda estacionaria se le llama **onda viajera**.

Ahora, sabemos que la relación entre la tensión, corriente e impedancia para la onda que se propaga en dirección +z es:

$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = Z_0$$

Pero la impedancia para la onda que se propaga en dirección -z difiere:

$$\frac{V_0^-}{I_0^-} = -Z_0$$

¿Por qué $-Z_0$?

Sabemos por el vector de Poynting $\bar{\mathcal{P}} = (1/2)\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*$ apunta en la dirección +z para una onda que se propaga en dirección +z, y en -z para el caso contrario.

Esto implica que, en la dirección -z, uno de los campos, ya sea el eléctrico $\tilde{\mathbf{E}}$ o el magnético $\tilde{\mathbf{H}}$ invierte su sentido para hacer que el vector de Poynting apunte en sentido contrario.

Consecuentemente, esto provoca que V_0 o I_0 se invierta, dando lugar al signo negativo.

Con esta relación en mente, podemos reescribir la expresión de $\tilde{I}(z)$ en función de la tensión y la impedancia:

$$\tilde{I}(z) = \frac{1}{Z_0} [V_o^+ e^{-\gamma z} - V_o^- e^{+\gamma z}]$$

Evalutando ahora la superposición de las ondas viajeras espacialmente, obtenemos un patrón de **onda estacionaria**, con sus respectivos máximos y mínimos periódicos.

La tensión o corriente fasorial en cualquier punto de z representa una función senoidal, pero, en contraste con una onda viajera, las ondas estacionarias muestran una fuerte modulación de la amplitud sobre el espacio de la longitud de onda λ de la onda.

Simplificando, durante la longitud de onda λ de la onda, la amplitud de la onda estacionaria varía según la posición de z .

Matemáticamente lo podemos describir de la siguiente manera. Primero, vamos a convertir nuestra tensión fasorial a su forma tiempo-dependiente. Para simplificar los cálculos, hemos asumido que $\alpha = 0$:

$$v(z, t) = \Re \left\{ \tilde{V}(z) e^{j\omega t} \right\} = \Re \left\{ [V_o^+ e^{-\gamma z} + V_o^- e^{+\gamma z}] e^{j\omega t} \right\}$$

Como las amplitudes son reales, $\Re e^{j(\omega t \pm \beta z)} = \cos(\omega t \pm \beta z)$:

$$v(z, t) = V_o^+ \cos(\omega t - \beta z) + V_o^- \cos(\omega t + \beta z)$$

y con la identidad trigonométrica $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$, con $a = \omega t$ y $b = \beta z$, reescribimos la expresión como:

$$v(z, t) = (V_o^+ + V_o^-) \cos(\beta z) \cos(\omega t) + (V_o^+ - V_o^-) \sin(\beta z) \sin(\omega t)$$

La amplitud máxima de la onda estacionaria se da cuando las ondas viajeras coinciden en fase, $V_{max} = |V_o^+| + |V_o^-|$. Por otro lado, la amplitud mínima cuando están en oposición de fase, $V_{min} = ||V_o^+| - |V_o^-||$.

Los máximos se encuentran a una distancia de $\lambda/2$ y los mínimos en medio de ambos máximos.

De forma muy similar podemos definir una expresión para la corriente de la onda estacionaria:

$$i(z, t) = \Re \left\{ \tilde{I}(z) e^{j\omega t} \right\} = \Re \left\{ \frac{1}{Z_0} [V_o^+ e^{-\gamma z} - V_o^- e^{+\gamma z}] e^{j\omega t} \right\}$$

asumiendo que V_o^+ , V_o^- y Z_0 son reales, la expresión se convierte en:

$$i(z, t) = \frac{1}{Z_0} (V_o^+ \cos(\omega t - \beta z) - V_o^- \cos(\omega t + \beta z))$$

Con identidades trigonométricas esto rápidamente se convierte en:

$$i(z, t) = \left(\frac{V_o^+ - V_o^-}{Z_0} \right) \cos(\beta z) \cos(\omega t) + \left(\frac{V_o^+ + V_o^-}{Z_0} \right) \sin(\beta z) \sin(\omega t)$$

La posición donde la corriente es máxima coincide justo con la posición donde la tensión es mínima, y cuando la corriente es mínima, la tensión es máxima. Esto es una consecuencia directa de la inversión del signo de la amplitud I_0^- .

4.6. Reflexión sobre una carga

Consideremos una línea de transmisión (LT) de longitud l e impedancia característica Z_0 . En el extremo $z = -l$ se conecta una fuente que genera una onda progresiva viajando en la dirección $+z$. En el extremo opuesto ($z = 0$), la línea termina en una carga con impedancia Z_L .

Cuando la onda incidente alcanza la carga, parte de su energía puede ser reflejada, generando una onda que se propaga en sentido opuesto ($-z$). Esta onda reflejada incidirá nuevamente en la fuente, provocando sucesivas reflexiones múltiples si no existe adaptación de impedancias en ambos extremos.

En esta sección, analizaremos el sistema bajo la suposición de régimen permanente sinusoidal, es decir, una vez que los transitorios se han extinguido y se ha establecido un patrón de ondas estacionarias.

4.6.1. Coeficiente de reflexión

La amplitud de la onda reflejada es proporcional a la amplitud de la onda incidente. Definiremos la amplitud de la onda reflejada como V_0^- , denotando el exponente $-$ la dirección de propagación de la onda $-z$, y la de la incidente como V_0^+ .

Recordamos del anterior tema que un parámetro útil para describir la relación entre estas amplitudes es el **coeficiente de reflexión**. La idea es la misma, adaptamos la expresión que presentamos para nuestras necesidades actuales, por tanto, definimos Γ_L como:

$$\Gamma_L = \frac{V_0^-}{V_0^+}$$

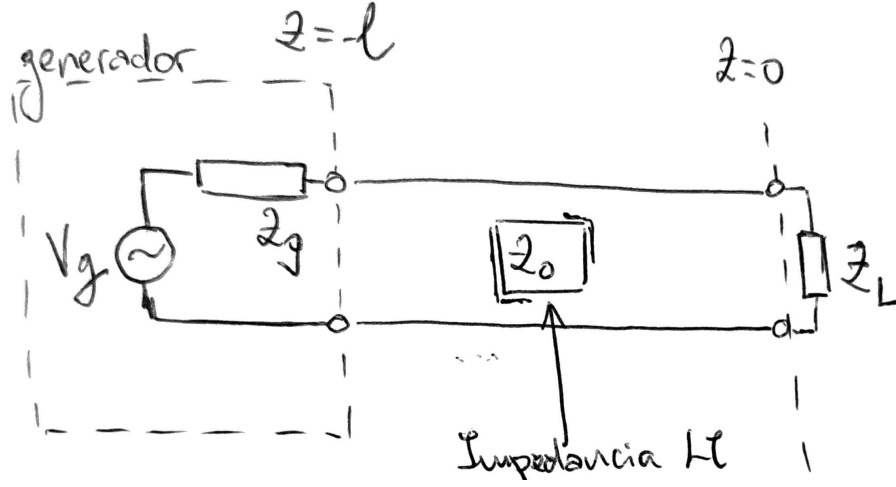


Figura 4.7: LT con impedancia característica Z_0 , con una fuente senoidal (impedancia Z_g , señal de amplitud V_g) en $z = -l$ y una carga de impedancia Z_L en $z = 0$.

¿Cuáles son los valores de ambas amplitudes? Sabemos que la fuente genera una tensión de amplitud V_g y que posee una impedancia interna Z_g . Para simplificar las cuentas, hemos preferido mantener que la fuente se encuentra en la posición $z = -l$ y la carga en $z = 0$.

La suma de ambas amplitudes, la de la incidente y reflejada ha de ser, necesariamente, la ecuación de onda de la tensión evaluada en $z = 0$, es decir,

$$\tilde{V}_L \equiv \tilde{V}(0) = V_0^+ + V_0^-$$

De forma similar, la corriente que circulará por la carga al final de la LT será

$$I_L \equiv I(0) = \frac{V_0^+}{Z_0} - \frac{V_0^-}{Z_0}$$

Ahora, sabemos por la Ley de Ohm que la caída de tensión entre ambos bornes debe cumplir la siguiente relación: $V_L = I_L Z_L$, por tanto, se cumple que:

$$V_0^+ + V_0^- = I_L Z_L$$

De la expresión de corriente anterior, que representa la tensión incidente neta, si quitamos el denominador multiplicando ambas partes de la igualdad por Z_0 , tenemos que:

$$I_L Z_0 = V_0^+ - V_0^-$$

Con estas dos igualdades, puedo despejar tanto V_0^+ como V_0^- , resultando en:

$$V_0^+ = \frac{I_L}{2}(Z_L + Z_0)$$

$$V_0^- = \frac{I_L}{2}(Z_L - Z_0)$$

Sabiendo esto, podemos ya determinar el coeficiente de reflexión como:

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Se cumple que, si la impedancia característica de la LT Z_0 coincide con la de la carga Z_L , el coeficiente de reflexión será 0, dicho de otro modo, si $Z_0 = Z_L$, no habrá reflexión en la LT provocando situaciones de interferencia.

Si cortocircuitamos la LT, es decir, que $Z_L = 0$, inevitablemente $\Gamma_L = -1$, dando lugar a que la onda reflejada tenga la misma amplitud que la incidente, pero invertida. La tensión $V_L = V_0^+ + V_0^-$ será $V_L = 0$. La corriente será máxima ($2V_0^+/Z_0$), aunque para el cálculo de la tensión nula en la carga este valor no es determinante.

Por otro lado, si abrimos el circuito, es decir, que $Z_L = \infty$, el coeficiente de reflexión $\Gamma_L = 1$, dando lugar a que la onda reflejada tenga la misma amplitud que la incidente. Las amplitudes $V_0^+ = V_0^-$ son idénticas, la tensión de la carga es $V_L = 2V_0^+$ pero no hay corriente $I_L = 0$.

4.6.2. Patrón de onda estacionaria por desajuste de impedancias

¿Pero qué pasa cuando las impedancias no coinciden? Analizando el patrón de onda estacionaria producida por la diferencia de impedancias, podremos describir perfectamente la carga de la impedancia.

Sabemos que la fuente genera una onda que viaja a lo largo de la LT de longitud l e incide en la carga de impedancia Z_L . Sabemos también que en el punto de incidencia se crea una onda de sentido contrario de amplitud $V_0^- = \Gamma_L V_0^+$.

Partiendo de la expresión de tensión fasorial, podemos escribir una ecuación de onda que comprenda la relación entre ambas amplitudes. Sabiendo que $V_0^- = \Gamma_L V_0^+$, $\tilde{V}(z)$ se reescribe como:

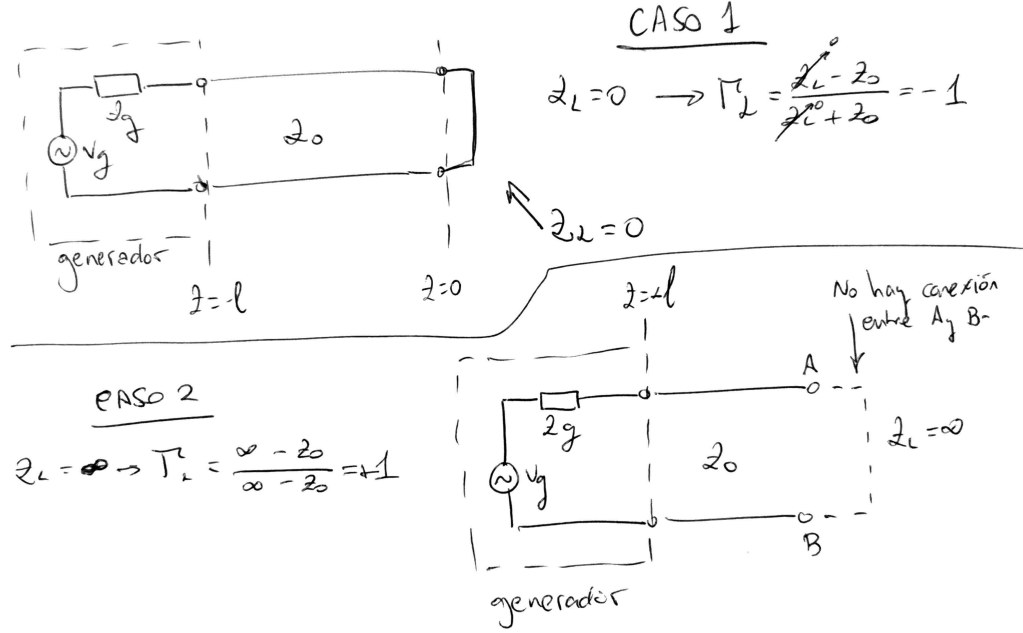


Figura 4.8: Caso cortocircuito y circuito abierto para la figura 4.7

$$\tilde{V}(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z} \iff \tilde{V}(z) = V_0^+ [e^{-\gamma z} + \Gamma_L e^{+\gamma z}]$$

Recordando del tema anterior, volvemos a introducir la *SWR* o *Standing Wave Ratio*, la relación entre el valor máximo y mínimo que toma la onda estacionaria, el número que nos dice cuánto sube y baja la onda. La SWR se define como $S = V_{max}/V_{min}$.

En las LT con pérdidas ($\alpha \neq 0$), las amplitudes de las ondas varían exponencialmente con la distancia z , y por tanto, V_{max} y V_{min} varían a lo largo de la línea.

Vamos a asumir el caso más sencillo para introducir el concepto, una LT sin pérdidas, $\alpha = 0$. En este caso,

$$V_{max} = |V_0^+|(1 + |\Gamma_L|)$$

pues como $\alpha = 0$, $e^{\pm\gamma z}$ se simplifica en $e^{\pm j\beta z}$, produciéndose V_{max} cuando las ondas que viajan en dirección $+z$ y $-z$ coinciden en fase.

De forma similiar, definimos V_{min} como:

$$V_{min} = |V_0^+| - |V_0^-| = |V_0^+|(1 - |\Gamma_L|)$$

Usando estas expresiones de V_{max} y V_{min} , la SWR se definirá como

$$S = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}$$

cuando la LT sea sin pérdidas ($\alpha = 0$), relacionando directamente la SWR con el coeficiente de reflexión.

Por otro lado, podemos evaluar el patrón de onda estacionaria para la corriente $\tilde{I}(z)$ partiendo de la siguiente expresión que modificaremos con la relación $V_0^- = \Gamma_L V_0^+$, $\tilde{V}(z)$:

$$\tilde{I}(z) = \frac{1}{Z_0} [V_0^+ e^{-\gamma z} - V_0^- e^{+\gamma z}] \iff \frac{V_0^+}{Z_0} [e^{-\gamma z} - \Gamma_L e^{+\gamma z}]$$

Para el caso de las LT sin pérdidas ($\alpha = 0$), la corriente máxima y mínima tiene valores:

$$I_{max} = \frac{|V_0^+|}{Z_0} (1 + |\Gamma_L|)$$

$$I_{min} = \frac{|V_0^+|}{Z_0} (1 - |\Gamma_L|)$$

Sabiendo los valores que pueden tomar las amplitudes de la tensión o corriente, podemos empezar a indagar las posiciones en las que se encuentran.

Para simplificar las expresiones, asumiremos que nuestra LT es sin pérdidas ($\alpha = 0$) y que la impedancia $Z_0 = R_0$ es real.

Si la impedancia de la carga es compleja, Γ_L lo será inevitablemente:

$$\Gamma_L = |\Gamma_L| e^{j\theta_r}$$

donde el coeficiente de reflexión es representada en términos de magnitud $|\Gamma_L|$ y fase θ_r .

Partiendo de la expresión de tensión que antes hemos obtenido relacionando las amplitudes de V_0^+ y V_0^- con el coeficiente de reflexión Γ_L , y sabiendo que $\alpha = 0$, puedo obtener la tensión en cualquier lugar de z con la siguiente expresión:

$$\tilde{V}(z) = V_0^+ [e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{+j\beta z}] = V_0^+ [e^{-j\beta z} + |\Gamma_L| e^{j\theta_r} e^{+j\beta z}]$$

Para que la tensión sea máxima, los dos fasores (incidente y reflejado) deben alinearse en fase. Esto ocurre cuando el ángulo de fase del término incidente es igual al del término reflejado (más un número entero m de vueltas completas 2π):

$$-\beta z_{max} - (\theta_\Gamma + \beta z_{max}) = 2m\pi, m \in \mathcal{N}$$

$-\beta z_{max}$ corresponde a la ángulo de fase del ángulo incidente y $(\theta_\Gamma + \beta z_{max})$ al ángulo de fase del ángulo reflejado. Reordenando los términos para despejar la fase del coeficiente de reflexión θ_Γ para obtener

$$\theta_\Gamma = -2\beta z_{max} - 2m\pi$$

y sabiendo que z_{max} es la posición del primer máximo (la más próxima a la carga), usamos $m = 0$ para encontrar

$$\theta_\Gamma = -2\beta z_{max}$$

Por otro lado, para obtener la posición del primer mínimo, tenemos que

$$\theta_\Gamma = -2\beta z_{min} \pm \pi$$

Escogeremos + o - para encontrar el mínimo en el rango $-\lambda/2 < z_{min} \leq 0$

4.6.3. Impedancia de entrada

Evaluada el patrón de onda estacionaria provocada al final de la LT, nos resulta de especial interés conocer la impedancia de entrada de la LT. De forma intuitiva, definimos la impedancia de entrada como la ratio entre la tensión y corriente de entrada en la LT:

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = \frac{V(-l)}{I(-l)}$$

Es decir, la tensión y corriente de entrada dependerá completamente de la longitud de la LT. Aunque parezca extraño, al variar la longitud de la LT, también lo hará el patrón de onda estacionaria.

Si ampliamos el desarrollo de la expresión anterior:

$$Z_{in} = \frac{V_0^+ [e^{-\gamma(-l)} + \Gamma_L e^{\gamma(-l)}]}{(V_0^+/Z_0) [e^{-\gamma(-l)} - \Gamma_L e^{\gamma(-l)}]}$$

Sabiendo que $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$, reescribiendo la ecuación y reordenando sus términos, tengo que:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L (e^{\gamma l} + \Gamma_L e^{-\gamma l}) + Z_0 (e^{\gamma l} - \Gamma_L e^{-\gamma l})}{Z_L (e^{\gamma l} - \Gamma_L e^{-\gamma l}) + Z_0 (e^{\gamma l} + \Gamma_L e^{-\gamma l})}$$

Elliot hace uso de funciones hiperbólicas para simplificar más expresión, resultando en la siguiente expresión general:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh \gamma l}{Z_0 + Z_L \tanh \gamma l}$$

y en la siguiente expresión para líneas de transmisión sin pérdidas¹:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l}$$

Se aprecia que la impedancia de entrada tiene forma compleja, habitualmente suele serlo debido a la variación de magnitud y fase a lo largo de la línea.

Si la impedancia característica de la LT Z_0 coincide con la de la carga Z_L , es decir, $Z_L = Z_0$, se cumple que $\Gamma_L = 0$ y que $Z_{in} = Z_0 = Z_L$ independientemente de la longitud de la LT. Esta es la razón por la que siempre trataremos de igualar la impedancia de la carga a la de la LT, para garantizar el máximo rendimiento de la misma, porque evitaremos añadir un factor que devuelva la energía de la señal que transmitimos a través de la línea a la fuente.

Ahora, cuando decidimos cortocircuitar la carga, es decir, $Z_L = 0$, la impedancia de entrada será:

$$Z_{in} = Z_0 \tanh \gamma l$$

Para las líneas de transmisión sin pérdidas será:

$$Z_{in} = jZ_0 \tan \beta l$$

En este caso particular (línea en cortocircuito), si la longitud de la línea es tal que sitúa un nodo de tensión en los bornes de entrada (cuando $\beta l = m\pi$) (lo que implica un antinodo de corriente), la impedancia de entrada será nula ($Z_{in} = 0$). Por el contrario, si la longitud provoca un antinodo de tensión en la entrada ($\beta l = (m + 1/2)\pi$) (y por tanto un nodo de corriente), la impedancia vista será infinita ($Z_{in} \rightarrow \infty$).

La impedancia de una línea en cortocircuito es puramente reactiva y varía continuamente (la señal es senoidal). La línea alterna entre comportarse como una inductancia (reactancia positiva, donde la corriente se retrasa respecto a la tensión) y una capacitancia (reactancia negativa, donde la corriente adelanta a la tensión). Dicho de otro modo, ajustando la longitud de la línea, es posible simular el comportamiento de bobinas y condensadores reales.

¹Cabe denotar que Elliot hace uso de R_0 para referirse a impedancias reales, pero, para mantener la simplicidad del resumen y del formulario, opto por usar Z_0 .

Casos especiales

Antes de avanzar a la siguiente sección, vamos a tomar una pequeña vista a un par de casos específicos.

Empezamos con el primero. Tenemos una LT que tiene las siguientes características: $Z_L = 0$ (cortocircuitada), $\alpha = 0, \gamma = j\beta$ (sin pérdidas), $l \ll 1/\beta$.

Con estas características, $Z_{in} = jZ_0 \tan \beta l$, aplicando la aproximación de $\tan \beta l \approx \beta l$ (válido si $\beta l \ll 1$), y usando $Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$ y $\beta = \omega\sqrt{L'C'}$ tengo que la impedancia de entrada es:

$$Z_{in} \approx jZ_0\beta l = j\sqrt{\frac{L'}{C'}}\omega\sqrt{L'C'}l = j\omega L'l$$

Observamos en esta LT, en cortocircuito, muy muy pequeña, que tiene un aspecto inductivo de magnitud $L'l$.

El último caso especial para Z_{in} tenemos el circuito abierto, $Z_L = \infty$. Como $Z_L \gg Z_0$, Z_0 se convierte despreciable, teniendo que la impedancia de entrada es $Z_{in} = Z_0 / \tanh \gamma l$. Para el caso de una LT sin pérdida,

$$Z_{in} = \frac{-jZ_0}{\tan \beta l}$$

En este caso particular, si la longitud de la línea es tal que sitúa un nodo de tensión en los bornes de entrada (cuando $\beta l = m\pi$) (lo que implica un antinodo de corriente), la impedancia de entrada será INFINITA ($Z_{in} \rightarrow \infty$). Por el contrario, si la longitud provoca un antinodo de tensión en la entrada ($\beta l = (m + 1/2)\pi$) (y por tanto un nodo de corriente), la impedancia vista será NULA ($Z_{in} = 0$). Justo lo contrario del caso $Z_L = 0$ que vimos antes.

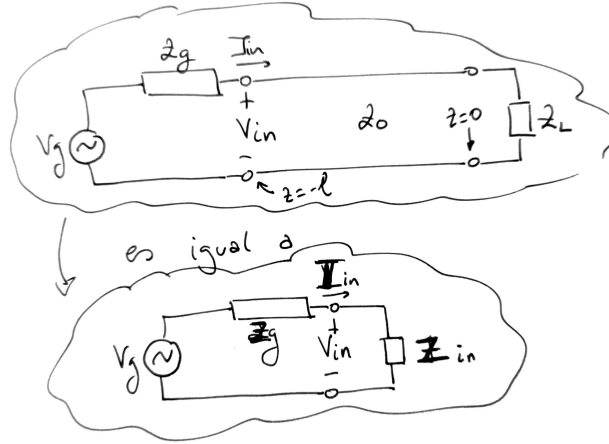
Si el circuito abierto es muy pequeño,

$$Z_{in} \approx -jZ_0 \frac{1}{\beta l} = -j\sqrt{\frac{L'}{C'}} \frac{1}{\omega\sqrt{L'C'}l} = \frac{-j}{\omega C'l}$$

Finalmente, apreciamos en este caso que una LT abierta, muy muy pequeña, se comporta como un condensador con capacitancia total $C'l$ e impedancia Z_{in} .

4.6.4. Amplitudes de ondas viajeras V_0^+ y V_0^-

Nos falta averiguar cuáles son las amplitudes de nuestras ondas viajeras V_0^+ y V_0^- en términos de la tensión de la fuente, y la impedancia de la carga.

Figura 4.9: LT de longitud l y su circuito equivalente

En la figura (4.9) se ha construido el circuito equivalente a todo el modelo de LT que hemos estado trabajando hasta ahora. Nuestro objetivo es calcular V_{in} y I_{in} , la tensión y corriente a la entrada de la LT.

Observando el circuito equivalente de la figura (4.9), nos damos cuenta de que se trata de un divisor de tensión, por tanto, la tensión V_{in} viene dado por:

$$V_{in} = V_g \frac{Z_{in}}{Z_g + Z_{in}}$$

Por LVK, tengo que La corriente I_{in} atraviesa la impedancia de la fuente Z_g , así que la tensión a lo largo de este elemento es $I_{in}Z_g$, por tanto,

$$V_{in} = V_g - I_{in}Z_g$$

y, por la ley de Ohm sé que $V_{in} = I_{in}Z_{in}$, despejando I_{in} en ambas expresiones tengo que:

$$I_{in} = \frac{V_g}{Z_g + Z_{in}}$$

y que

$$V_{in} = \frac{V_g Z_{in}}{Z_g + Z_{in}}$$

Sabemos que

$$V_{in} = V(-l) = V_0^+ e^{\gamma l} + V_0^- e^{-\gamma l} = V_0^+ e^{\gamma l} (1 + \Gamma_L e^{-2\gamma l})$$

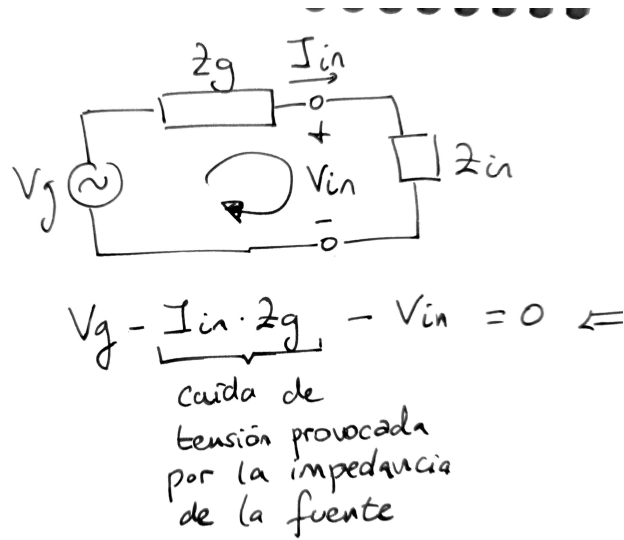


Figura 4.10: Análisis LKV del circuito de la figura 4.9

Igualando V_{in} en la expresión anterior y la del divisor de tensión tengo que:

$$V_0^+ = V_g \left(\frac{Z_{in}}{Z_g + Z_{in}} \right) \left(\frac{e^{-\gamma l}}{1 + \Gamma_L e^{-2\gamma l}} \right)$$

Podemos obtener la amplitud de V_0^- de la siguiente igualdad $V_0^- = \Gamma_L V_0^+$.

4.7. Correspondencia de impedancias

Muchas veces deseamos tener la gran suerte de que la impedancia característica de nuestra LT coincida con la de la carga, pero determinadas circunstancias, no es factible.

Para ello, necesitaremos algunos trucos para reducir los reflejos en la carga. Veremos dos:

4.7.1. Transformador de cuarto de onda

Empezamos con el transformador de cuarto de onda, consiste en un segmento corto de LT que se inserta en otra línea para minimizar los reflejos provocados por la carga. En la figura (4.11) se aprecia uno.

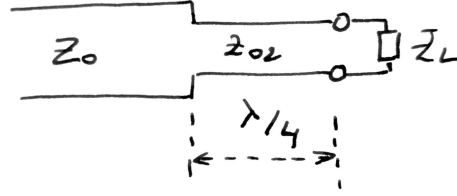


Figura 4.11: Transformador de cuarto de onda.

Al insertar el transformador, una onda que viaja en dirección $+z$ se reflejará parcialmente en la conexión de ambas LT y en la carga. El reflejo de la carga viajará de vuelta hacia la fuente, atravesando primero el transformador y luego la LT principal. Ambos reflejos presentan la misma amplitud.

Al ser la LT del transformador $\lambda/4$, provocamos un desfase de π (la onda recorre $\lambda/4$ en la ida y en la vuelta, es decir $\lambda/2$), haciendo que, el reflejo de la carga y el reflejo de la conexión de ambas LT se cancelen.

Estaríamos obteniendo la máxima transmisión porque eliminamos el retorno de energía a la fuente.

Veamos la matemática detrás. Para simplificar las operaciones, asumiremos que ambas líneas no tienen pérdidas.

Vamos a determinar la impedancia de la línea de cuarto de onda usando la expresión

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l}$$

Adaptando a expresión anterior a nuestras necesidades, con $l = \lambda/4$, tengo que $\beta l = (2\pi/\lambda)(\lambda/4) = \pi/2$. Como $\tan \beta l$ tiende a infinito, lo vamos a dejar que tome ese valor y tomaremos el límite de la expresión:

$$Z_{in} = \lim_{\tan(\beta l) \rightarrow \infty} Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} = \frac{Z_0^2}{Z_L}$$

Ahora, consideramos esta LT de cuarto de onda como la carga de la LT principal de característica Z_0 . Para eliminar el reflejo de esta carga, se debe cumplir que $Z_{in} = Z_0$. Por tanto, la impedancia característica de la LT agregada debe ser:

$$Z_{02} = \sqrt{Z_0 Z_L}$$

Esta expresión la hemos sacado despejando Z_{02} de la siguiente relación $Z_{in} = Z_{02}^2/Z_L$.

Antes hemos dicho que las amplitudes de ambas ondas reflejadas son idénticas, esto se debe a que el coeficiente de reflexión de ambos reflejos son idénticos:

$$\Gamma_{conex.LT} = \frac{Z_{02} - Z_0}{Z_{02} + Z_0} = \frac{\sqrt{Z_0 Z_L} - Z_0}{\sqrt{Z_0 Z_L} + Z_0} = \frac{\sqrt{Z_L} - \sqrt{Z_0}}{\sqrt{Z_L} + \sqrt{Z_0}}$$

$$\Gamma_{transf \rightarrow carga} = \frac{Z_L - Z_{02}}{Z_L + Z_{02}} = \frac{Z_L - \sqrt{Z_0 Z_L}}{Z_L + \sqrt{Z_0 Z_L}} = \frac{\sqrt{Z_L} - \sqrt{Z_0}}{\sqrt{Z_L} + \sqrt{Z_0}}$$

Tengamos en cuenta que esta explicación no está completa, porque ignora los reflejos múltiples entre las superficies, pero, nos da una primera vista bastante buena del transformador.

4.7.2. Líneas cortocircuitadas o abiertas en paralelo

El problema que tratamos de resolver es el mismo que antes. Tenemos un desajuste de impedancias en la línea que da lugar a reflejos. En este caso, para neutralizar los reflejos, conectamos una línea corta l_{st} en paralelo, o bien cortocircuitadas o abierta al final, en una determinada posición l_L .

Desde el punto de vista físico, nuestro objetivo es modificar la impedancia compleja que ve la fuente. Necesitamos anular la parte reactiva (imaginaria) y lograr que la parte resistiva (real) sea idéntica a la impedancia característica de la línea (Z_0).

La línea que conectamos no tiene pérdidas², actúa físicamente como un componente puramente reactivo (una bobina o un condensador) compensando la reactancia del circuito.

Sin embargo, para simplificar la descripción matemática de este fenómeno, recurrimos a la admitancia, definida como la inversa de la impedancia ($Y = Z^{-1}$). Al trabajar con conexiones en paralelo, las admitancias nos permiten sumar directamente los valores ($Y_{in} = Y_0 + Y_{st}$), evitando así la complejidad algebraica y el riesgo de errores asociados al cálculo directo con impedancias.

Empezamos definiendo la admitancia asociada a la impedancia de entrada Z_{in} :

$$Y_{in} = Z_{in}^{-1} = Y_0 \frac{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l_L)}{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l_L)} + Y_{st}$$

²En la realidad esto es falso, pues todo conductor físico tiene cierta resistencia y dieléctrico imperfecto, por lo que siempre existen pérdidas. Ahora bien, como estas líneas son tan cortas, en comparación con el resto de la LT, la atenuación acumulada suele ser despreciable comparada con el efecto de transformación de impedancia que buscamos. Por tanto, es una idealización estándar que hacemos para simplificar operaciones sin cometer demasiado errores.

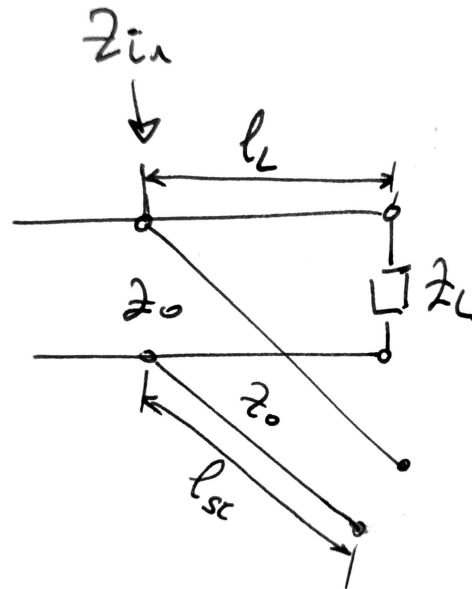


Figura 4.12: Líneas abiertas en paralelo.

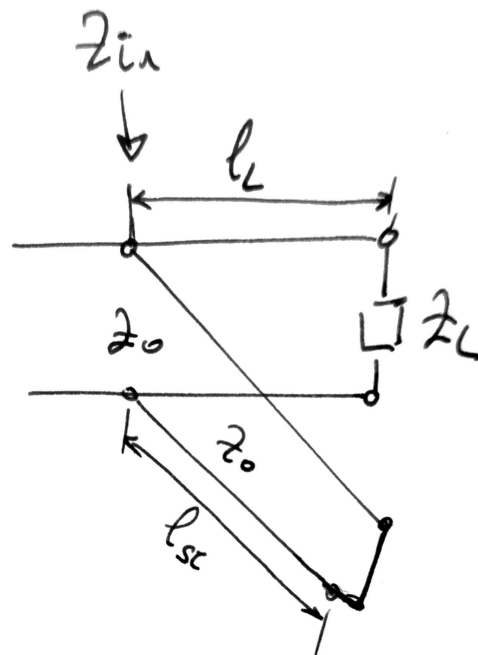


Figura 4.13: Líneas cortocircuitadas en paralelo.

donde el primer término es la admitancia de la LT y Y_{St} corresponde a la admitancia de la línea corta de l_{St} unidades de longitud:

$$Y_{St} = Z_{St}^{-1} = -jY_0 \cot(\beta l_{St})$$

si la LT que conectamos está cortocircuitada, o bien si está abierto [6]:

$$Y_{St} = Z_{St}^{-1} = jY_0 \tan(\beta l_{St})$$

Ahora bien, sabemos que $Y_{in} = Y_0$ debe cumplirse si no queremos tener reflexión en nuestra LT. Con esta condición, ya puedo averiguar donde he de conectar la LT secundaria. Para ello, me quedo con la parte real de la suma de admitancias y con $\Re(Y_{in}) = Y_0$, entonces:

$$\Re(Y_{in}) = \Re(Y_0) = \Re\left(Y_0 \frac{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l_L)}{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l_L)}\right)$$

De esta expresión puedo despejar l_L . Ahora, para despejar la longitud que ha de tener la LT secundaria, tomo la parte imaginaria de la suma de admitancias, y ha de cumplirse que $\Im(Y_{in}) = 0$ para que no tengamos componente reactivo:

$$\Im(Y_{in}) = 0 = \Im\left(Y_0 \frac{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l_L)}{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l_L)} + Y_{St}\right)$$

De esta expresión despejo l_{St} .

4.8. La carta de Smith

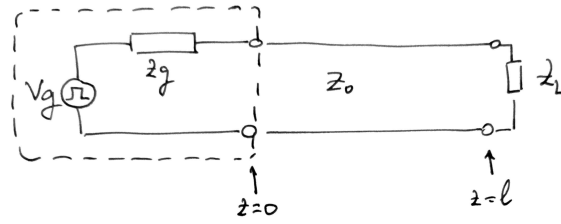
Sección “Carta de Smith”: Recurso en desarrollo

Todavía estoy trabajando en esta sección. Prefiero tomarme un tiempo para revisar bien los materiales y enlaces externos para asegurarme de que realmente valen la pena antes de recomendártelos.

En cuanto lo tenga listo, cargaré a la carpeta de Wuolah un PDF llamado *Anexo T4 - Carta de Smith.pdf*, que contendrá toda la información necesaria para entender y aprender a usar esta herramienta.

Además, en la carpeta compartida enlazada en mi biografía, habrá una copia de seguridad de todos estos recursos para garantizar su preservación.

¡Disculpa las molestias!



Y Hemos cambiado la fuente de $\odot$ a $\oplus$
 Y Hemos cambiado la posición relativa del inicio y
 final de la LT!

Figura 4.14: LT con una fuente que produce un pulso de tensión V_g . La impedancia interna de la fuente es Z_g , la de la carga es Z_L y la característica de la LT, asumiendo sin pérdidas, es Z_0 .

4.9. Pulsos en LT

Antes de cerrar el tema, nos resulta de especial interés indagar en la propagación de pulsos en líneas de transmisión, debido a su importancia en la era digital.

Recordamos que, para velocidades de reloj de 1 GHz, cualquier circuito, de apenas escasos centímetros, es más que suficiente para exceder el límite en el que la Teoría de Circuitos tiene sentido. Los efectos de propagación pueden dar lugar a la distorsión de las señales y la pérdida de bits.

Las bases para la propagación de pulsos es similar a la de la propagación de la onda. Cuando un pulso es lanzado en una LT, toma un tiempo determinado hasta que llega a la carga, donde una porción del pulso incidente volverá a la fuente.

En este texto nos limitaremos a lo más sencillo, una LT sin pérdidas con cargas reales, ignorando también las variaciones de velocidad de un pulso de los diferentes componentes de Fourier.

Consideremos un pulso generado por la fuente que vemos en la figura (4.14). La LT tiene una longitud l , la velocidad del pulso es v_{pulso} y por ahora, consideraremos que la duración del pulso es $\tau_{pulso} \ll l/v_{pulso}$, siendo l/v_{pulso} el tiempo que tardaría un pulso en recorrer la LT. La fuente se encuentra en $z = 0$ y la carga en $z = l$.

La fuente genera un pulso de altura V_g , que empieza a propagarse sobre

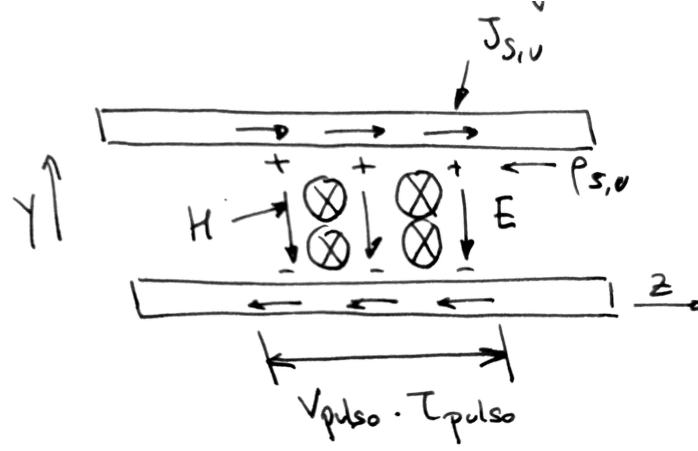


Figura 4.15: Captura de un pulso de tensión en una LT que se propaga hacia la derecha, y la longitud del pulso es $v_{pulso}\tau_{pulso}$, donde v_{pulso} es la velocidad y τ_{pulso} la duración del pulso.

la LT. Todos los puntos donde la diferencia de potencial entre los conductores no es cero, hay un campo eléctrico apuntando desde las cargas positivas de un conductor a las negativas del otro.

A medida que el pulso se propaga sobre la línea, este «pulso de carga» ha de moverse también, por tanto, tenemos una corriente. En la figura (4.15) apreciamos la diferencia de potencial y corriente entre los dos conductores V_1^+ e I_1^+ , el campo eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{H}$, la densidad de carga $\rho_{s,u}$ y de corriente $\mathbf{J}_{s,u}$ superficial en el conductor superior y $-\rho_{s,u}$ y $-\mathbf{J}_{s,u}$ en el inferior, dentro del pulso y cero en el resto de la LT.

En el caso de que el pulso llegase a la carga y se produciese una reflexión, el subíndice numérico indica el número de vueltas que ha dado el pulso, mientras que los exponentes $+$ y $-$, igual que antes, propagación en $+z$ y $-z$.

Como es de esperar, la tensión V_1^+ y corriente I_1^+ están relacionados uno a otro y la ratio deberá ser la impedancia característica de la LT Z_0 .

(Rel. pt. 4.6.4). La amplitud del primer pulso será:

$$V_1^+ = V_g \frac{Z_0}{Z_g + Z_0}$$

siendo V_g el pulso ideal generado por la fuente. Y su corriente:

$$I_1^+ = \frac{V_g}{Z_g + Z_0}$$

Al igual que antes, la tensión y corriente a lo largo de la corriente debe

cumplir con la ratio $V_L/I_L = Z_L$. Habitualmente suele ser distinta de Z_0 . La diferencia de impedancias $Z_L \neq Z_0$ da lugar a un pulso reflejado de amplitudes V_1^- e I_1^- de ratio $V_1^-/I_1^- = -Z_0$.

Con esto, podemos escribir Z_L en función de la suma de amplitudes incidente y reflejada:

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L} = \frac{V_1^+ + V_1^-}{I_1^+ + I_1^-}$$

La ratio entre el pulso incidente y el reflejado viene determinado por el factor de reflexión Γ_L :

$$\Gamma_L = \frac{V_1^-}{V_1^+} = \frac{-I_1^-}{I_1^+}$$

Con esta definición puedo reescribir Z_L como:

$$Z_L = \frac{V_1^+ + \Gamma_L V_1^+}{I_1^+ - \Gamma_L I_1^+} = \frac{V_1^+}{I_1^+} \left(\frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} \right)$$

Y como $V_1^+/I_1^+ = Z_0$, despejando Γ_L me da:

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Expresión en consonancia con la que obtenimos en el apartado 4.6.1.

El pulso reflejado tarda en llevar a la fuente $t = 2l/v_{pulso}$ (viaja en +z y luego en -z). Nuevamente, aquí tenemos la expectativa de que se refleje parcialmente. Sin repetir el proceso anterior, sacamos que:

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}$$

El segundo pulso reflejado tiene amplitud $V_2^+ = \Gamma_g V_1^- = \Gamma_L \Gamma_g V_1^+$, y se vuelve a propagar hacia la carga, donde otra vez es reflejado, con amplitud $V_2^- = \Gamma_L^2 \Gamma_g V_1^+$, y así infinitamente.

Si la impedancia de la carga es aproximadamente la de la LT, la amplitud del pulso reflejado disminuye después de unos escasos viajes. El caso contrario es trivial.

Estos efectos de rebote los habitualmente los observaríamos desde un osciloscopio, viendo las distintas tensiones en una ubicación específica z_0 en función del tiempo.

Una herramienta que nos puede resultar bastante útil es un **diagrama de rebotes**, que no es más que un diagrama que representa los rebotes del pulso de onda respecto al tiempo. En la figura (4.16) podemos apreciar una.

FIGURE 9.23 The voltage $v(t)$ versus t seen on the transmission line when measured (a) at the source end $z = 0$, (b) in the middle $z = \ell/2$, and (c) at the load $z = \ell$. We have used reflection coefficients $\Gamma_L = -0.8$ and $\Gamma_g = +0.8$ for this illustration.

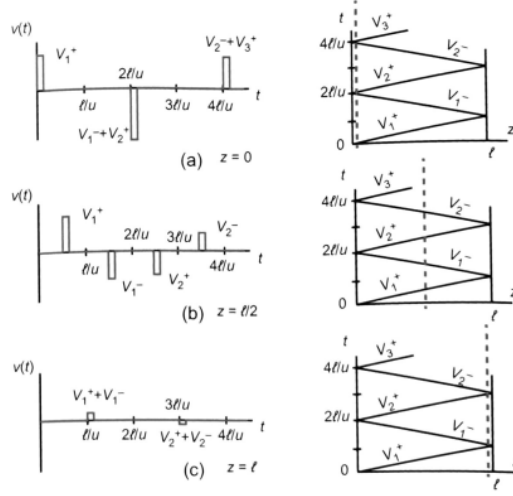


Figura 4.16: Figura 9.23 de la obra de Elliot en el que se aprecia las gráficas $v(t)$ medidas en a) $z = 0$, b) $z = l/2$ y c) $z = l$ para un pulso de duración muy corta, considerando los coeficientes de reflexión $\Gamma_L = -0,8$ y $\Gamma_g = +0,8$ para la ilustración. Y los diagramas de rebote, con líneas discontinuas marcando el punto donde se está evaluando la función $v(t)$. [1]

Si quisiéramos saber el tiempo que tomaría en llegar los rebotes en un determinado punto z_0 , simplemente tendríamos que trazar una línea vertical en dicho punto, y leer los tiempos a lo largo del eje vectorial en los puntos de intersección con las líneas de los rebotes. Además, este diagrama nos permitirá tener registrado las amplitudes de cada rebote.

Antes de acabar, tenemos que ver el comportamiento de los pulsos cuya duración no es corta. Hasta este momento hemos hablado de pulsos cortos en comparación con el tiempo necesario para recorrer la longitud de la LT. Con esta condición, los pulsos no se solapan.

Al tener pulsos de duración mayor, estos llegarán a solaparse, y la única dificultad adicional es que, las tensiones observadas se calculan mediante superposición. Es decir, que la tensión que vemos en un lugar específico será la suma de las amplitudes de cada pulso individual.

Este comportamiento queda perfectamente reflejado en la figura (4.17), donde nuevamente encontramos las gráficas $v(t)$ evaluadas en distintas posiciones y los diagramas de rebote.

La oscilación de la tensión en las gráficas $v(t)$ de la figura (4.17) se debe a que los coeficientes de reflexión Γ_L y Γ_g tienen signo distinto. El pulso al reflejarse en la carga, presentará una amplitud negativa, puesto que $\Gamma_L = -0,8$. Al llegar a la fuente, el pulso reflejado mantendrá V_2^+ su amplitud negativa

FIGURE 9.24 The voltage $v(t)$ versus t seen on the transmission line when measured (a) at the source end ($z = 0$), (b) in the middle ($z = \ell/2$), and (c) at the load ($z = \ell$) for a step function pulse which turns on at $t = 0$ and stays on. We have used reflection coefficients $\Gamma_L = -0.8$ and $\Gamma_g = +0.8$ for this illustration.

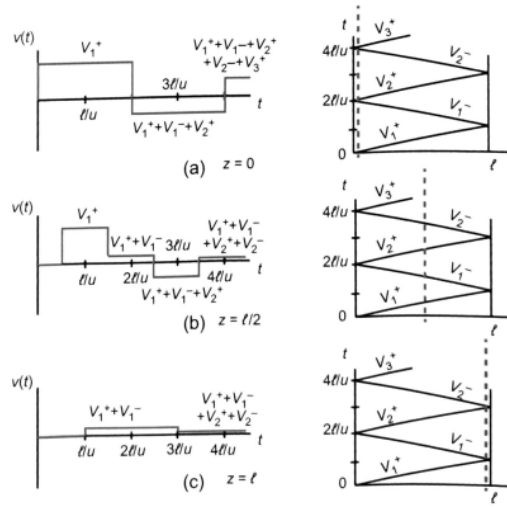


Figura 4.17: Figura 9.24 de la obra de Elliot en el que se aprecia las gráficas $v(t)$ medidas en a) $z = 0$, b) $z = l/2$ y c) $z = l$ para una función escalón que se enciende en $t = 0$ y se mantiene encendido, considerando los coeficientes de reflexión $\Gamma_L = -0,8$ y $\Gamma_g = +0,8$ para la ilustración. Y los diagramas de rebote, con líneas discontinuas marcando el punto donde se está evaluando la función $v(t)$. [1]

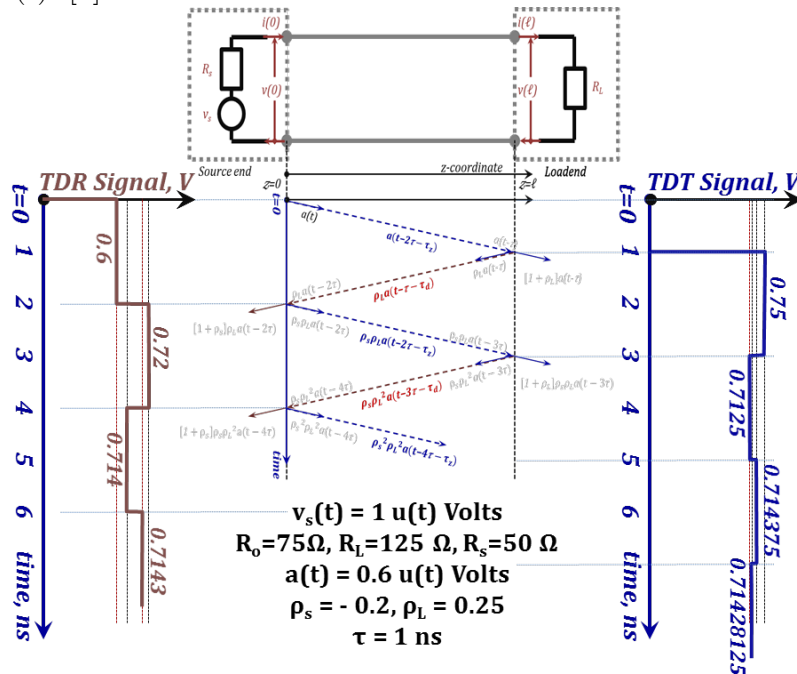


Figura 4.18: Gráficas TDR y TDT para una función escalón, considerando los coeficientes de reflexión $\rho_L = 0,25$ y $\rho_s = 0,2$ para la ilustración. Y el diagrama de rebote con las amplitudes marcadas. $a(t)$ es $a(t) = v(z = 0, t = 0)$. [7]

$V_2^+ < 0$, porque $\Gamma_L \Gamma_g < 0$, entonces $V_2^+ = \Gamma_L \Gamma_g V_1^+ < 0$. Pero este segundo pulso que viaja hacia la carga, al presentar amplitud negativa, el segundo pulso reflejado V_2^- presentará amplitud positiva porque $V_2^- = \Gamma_L V_2^+ = \Gamma_L^2 \Gamma_g V_1^+$.

Como los coeficientes de reflexión presentan signos contrarios, la gráfica $v(t)$ oscilará hasta estabilizarse en V_L , la tensión que afronta la carga.

Si los coeficientes de reflexión presentasen el mismo signo, no veríamos el patrón de oscilación de $v(t)$, sino una escalera que convergería en V_L .

Dos gráficas $v(t)$ bastante conocidas son:

- La **TDR** (Time Domain Reflectometry), es una gráfica de la señal observada en el extremo de la fuente ($z = 0$). Funciona como un radar” que nos permite localizar discontinuidades de impedancia analizando los ecos que retornan [8].
- La **TDI** (Time Domain Transmission), es otra gráfica análoga que mide la señal que llega en el extremo de la carga ($z = l$) [8].

En la figura (4.18) podemos observar ambas gráficas y el correspondiente diagrama de rebotes con las amplitudes marcadas. Ten en cuenta que en esta figura, se ha usado ρ en vez de Γ para referirse al coeficiente de reflexión.

Cabe mencionar que, si bien las figuras (4.17) y (4.18) solo muestran las gráficas $v(t)$ para pulsos de duración infinita o *respuesta al escalón*, consideramos pulso largo todo aquel cuyo tiempo supere el necesario para recorrer la longitud de la LT.

Finalmente, sabemos que estas gráficas convergen en V_L , la tensión que afronta la carga, que no es nada más que la suma de todas las contribuciones de amplitud de todos los pulsos que inciden sobre la carga:

$$\begin{aligned} V_L &= V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ + \dots = \\ &= V_1^+ + \Gamma_L V_1^+ + \Gamma_L \Gamma_g V_1^+ + \Gamma_L^2 \Gamma_g V_1^+ + \Gamma_L^2 \Gamma_g^2 V_1^+ + \Gamma_L^3 \Gamma_g^2 V_1^+ + \dots \end{aligned}$$

Sacando factor común, compactando la serie y usando la expansión de Taylor, tengo que:

$$V_L = V_1^+ \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L \Gamma_g}$$

y con $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$ y $\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}$ tengo que:

$$V_L = V_g \frac{Z_L}{Z_g + Z_L}$$

como vimos previamente.

Referencias capítulo «Líneas de Transmisión»

- [1] D. S. Elliott, *Electromagnetic fields for engineers*. Cambridge: Cambridge University Press, 2025, ISBN: 978-1-009-30944-8 978-1-009-30943-1. DOI: [10.1017/9781009309431](https://doi.org/10.1017/9781009309431)
- [2] C. Roldán Porta, G. Escrivá Escrivá y C. Roldán Blay, *Teoría de circuitos: adaptado a los grados de ingeniería*, es. Valencia: UPV, 2015, OCLC: 930876329, ISBN: 978-84-9048-378-7.
- [3] *Transmission line* - Wikipedia. visitado 15 de dic. de 2025. dirección: https://en.wikipedia.org/wiki/Transmission_line
- [4] J. L. Cano de Diego, Ó. Fernández Fernández y J. A. Pereda Fernández, *Medios de Transmisión Guiados*. visitado 15 de dic. de 2025. dirección: https://ocw.unican.es/pluginfile.php/3087/course/section/2932/MTG%20-%20Tema1_Teoria.pdf
- [5] *Línea de transmisión, qué es, características y tipos*, es. visitado 15 de dic. de 2025. dirección: <https://www.ferrovial.com/es/stem/linea-de-transmision/>
- [6] J. L. Cano de Diego, Ó. Fernández Fernández y J. A. Pereda Fernández, *Medios de Transmisión Guiados*. visitado 29 de dic. de 2025. dirección: https://ocw.unican.es/pluginfile.php/3087/course/section/2932/G834_Tema6_Teoria.pdf
- [7] *Chapter II-Lecture 5 of 10 Transmission Lines - Wave Equations*. visitado 30 de dic. de 2025. dirección: https://courses.ece.vt.edu/ece3105/chp2_lssn5.html
- [8] *Time-domain reflectometer*, en, Page Version ID: 1253992650, oct. de 2024. visitado 30 de dic. de 2025. dirección: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Time-domain_reflectometer&oldid=1253992650

Resumen elaborado por Alexandru Theodor Muntenas² durante el curso académico 2025 - 2026.