

Capítulo 3

Ondas planas

Este capítulo se basa en la estructura y el rigor de la obra “*Electromagnetic Fields for Engineers*” de Daniel S. Elliot [1]. Se recomienda la consulta de la obra original para un estudio exhaustivo.

Sobre las demostraciones

Estos apuntes incluyen las demostraciones que aparecen en el libro de Elliot. Aunque en la práctica (y en los exámenes) solemos ir directos a la fórmula final, he incluido el proceso de obtención porque es la única forma de evitar que las ecuaciones parezcan “magia”.

Ver de dónde salen las cosas ayuda a conectar la física con las matemáticas. Al final, usaremos la expresión resumida, pero haber entendido el camino nos da la seguridad de saber realmente qué estamos calculando y por qué.

3.1. Propagación en medios sin pérdidas

Un medio sin fuente, lineal isotrópico (las propiedades del medio no dependen de la dirección en la que es examinada[2]), homogéneo y no conductor se define como un **medio simple sin pérdidas**.

En estos medios, no hay cargas libres $\rho_v = 0$ y no hay corriente libre $J_v = 0$, haciendo que los campos sean solenoidales (es decir, «sus líneas de campo no pueden converger ni divergir de ningún punto; no pueden tener extremos localizados.»[3]).

El campo de desplazamiento $\mathbf{D}$ y el campo eléctrico $\mathbf{E}$ son proporcionales uno a otros $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, al igual que el campo magnético $\mathbf{H}$ y el flujo de densidad $\mathbf{B}$, $\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}$. Esto es característico de los medios lineales.

Asumiendo que la conductividad eléctrica $\sigma = 0$, con estas condiciones, podemos escribir la ley de Faraday como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

La ley de Ampère-Maxwell como:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

La ley de Gauss para campo eléctrico $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ se convierte en $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ y para campo magnético $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ en $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$.

Ahora bien, vamos a relacionar $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ tal que tengamos una expresión simple en función de uno de ellos. A partir de la ley de Ampère-Maxwell, aplicaremos a ambas partes de la ecuación el rotacional.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \times \left(\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Usando la identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H}$, la relación $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ y simplificando, obtenemos:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

Acabamos de obtener la ecuación de ondas del campo magnético dependiente del espacio $\nabla^2 \mathbf{H}$ y tiempo $\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$.

Si aplicamos el mismo procedimiento a la ley de Faraday, obtendríamos la ecuación de ondas del campo eléctrico:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

3.1.1. Solución general de la ecuación de onda

La solución general de la ecuación de onda puede escribirse como una función $f(t')$, donde la fase es $t' = t - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r})\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Aquí, $\hat{\mathbf{k}}$ es el *versor de propagación* (vector unitario, $|\hat{\mathbf{k}}| = 1$, en la dirección del movimiento).

Verificaremos esta afirmación demostrando que $f(t')$ satisface la ecuación de onda. Esto requiere calcular sus segundas derivadas, para facilitarnos la labor, uso el sistema de coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2 f(t') = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(t')$$

Sabiendo que $\hat{\mathbf{k}} = (\hat{k}_x x + \hat{k}_y y + \hat{k}_z z)$:

$$t' = t - (\hat{k}_x x + \hat{k}_y y + \hat{k}_z z) \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Y con eso, calculo la primera derivada de $f(t')$ respecto a x usando la regla de la cadena en el primer paso:

$$\frac{\partial f(t')}{\partial x} = \frac{df(t')}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial x} = (-\hat{k}_x \sqrt{\varepsilon \mu}) f'(t')$$

Volvemos a derivar y a usar la regla de la cadena y obtenemos:

$$\frac{\partial^2 f(t')}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(-\hat{k}_x \sqrt{\varepsilon \mu}) f'(t') \right] = (-\hat{k}_x \sqrt{\varepsilon \mu}) \frac{df'(t')}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial x} = (-\hat{k}_x \sqrt{\varepsilon \mu})^2 f''(t')$$

Ahora, calculamos la derivada de orden dos respecto al tiempo:

$$\frac{\partial^2 f(t')}{\partial t'^2} = f''(t')$$

y sustituyendo todo esto en la ecuación de onda:

$$\nabla^2 f(t') = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 f(t')}{\partial t'^2} \iff \left[(-\hat{k}_x \sqrt{\varepsilon \mu})^2 + (-\hat{k}_y \sqrt{\varepsilon \mu})^2 + (-\hat{k}_z \sqrt{\varepsilon \mu})^2 - \varepsilon \mu \right] f''(t') = 0$$

simplificando:

$$\left[\varepsilon \mu |\hat{\mathbf{k}}|^2 - \varepsilon \mu \right] f''(t') = 0$$

Sin quererlo queriendo, también hemos demostrado que $\hat{\mathbf{k}}$ ha de ser sí o sí unitario.

Una vez demostrado que $f(t')$ es, en efecto, la solución general, podemos analizar sus propiedades físicas. La más importante de ellas es la velocidad a la que se propaga esta onda.

La *velocidad de fase* (v_p) es la velocidad a la que se desplaza un punto de fase constante (es decir, un punto donde t' no cambia). Para encontrar esta velocidad, imponemos que la variación total de la fase sea nula: $\Delta t' = 0$.

Si partimos de la variación de t' :

$$\Delta t' = \Delta t - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \Delta \mathbf{r}) \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Al igualar a cero ($\Delta t' = 0$), obtenemos:

$$\Delta t = (\hat{\mathbf{k}} \cdot \Delta \mathbf{r}) \sqrt{\varepsilon \mu}$$

El desplazamiento $\Delta \mathbf{r}$ de un punto de fase constante ocurre, por definición, en la misma dirección que la propagación de la onda, $\hat{\mathbf{k}}$. Por lo tanto, podemos escribir $\Delta \mathbf{r} = \Delta r \hat{\mathbf{k}}$, donde Δr es la distancia escalar recorrida.

El producto escalar se simplifica enormemente:

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \Delta \mathbf{r} = \hat{\mathbf{k}} \cdot (\Delta r \hat{\mathbf{k}}) = \Delta r (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = \Delta r$$

Sustituyendo esto en nuestra ecuación, tenemos:

$$\Delta t = \Delta r \sqrt{\varepsilon \mu}$$

La magnitud de la velocidad de fase es $v_p = \frac{\Delta r}{\Delta t}$. Al despejar esta relación, tengo que:

$$v_p = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

Cabe destacar que, al ser un medio sin pérdidas, la velocidad de fase coincide con la velocidad a la que viaja la energía, la velocidad de propagación.

3.1.2. Campos armónicos

Los campos armónicos son aquellos que varían senoidalmente respecto al tiempo.

Con el análisis de Fourier podemos descomponer cualquier señal como la suma en serie de onda armónicas simples.

Es por ello que su estudio despierta interés.

Una función armónica se puede escribir como $E(t) = E_0 \cos(\omega t + \phi)$ aunque también como $E(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, con $A^2 + B^2 = E_0^2$ y $\phi = -\arctan \frac{B}{A}$.

Recordemos que de nuestras experiencias fasoriales los siguientes aspectos:

- $\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$
- $\sin \omega t = -\frac{j}{2}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$

Y que, para pasar de un fasor complejo a su equivalente con dependencia temporal, simplemente multiplicamos dicho fasor por $e^{j\omega t}$.

$$\tilde{E} = |E|e^{j\phi} \Rightarrow e^{j(\omega t + \phi)} \Rightarrow \Re(e^{j(\omega t + \phi)}) = |E| \cos \omega t + \phi = E(t)$$

y viceversa:

$$H(t) = a_x[H'_0 \cos(\omega t) - H''_0 \sin(\omega t)] \Rightarrow H(t) = a_x[H'_0 \Re(e^{j\omega t}) + H''_0 \Re(je^{j\omega t})]$$

$$H(t) = a_x[H'_0 \Re(e^{j\omega t}) + H''_0 \Re(je^{j\omega t})] = a_x \Re(H'_0 + jH''_0)e^{j\omega t} \Rightarrow \tilde{H} = a_x(H'_0 + jH''_0)$$

o su equivalente en forma exponencial:

$$\tilde{H} = a_x(H'_0 + jH''_0) = a_x H_0 e^{j\phi}$$

donde $H_0 = \sqrt{H'^2_0 + H''^2_0}$ y $\phi = \arctan(\frac{H''_0}{H'_0})$.

Con todo lo que hemos aprendido, vamos a reescribir las ecuaciones de Maxwell para reflejar esta nueva realidad fasorial:

- Ley de Gauss: $\nabla \cdot \tilde{D} = \tilde{\rho}_v$
- Ley de Gauss en el magnetismo: $\nabla \cdot \tilde{B} = 0$
- Ley de Faraday: $\nabla \times \tilde{E} = -j\omega \tilde{B}$
- Ley de Ampère-Maxwell: $\nabla \times \tilde{H} = \tilde{J}_v + j\varepsilon\omega \tilde{D}$

Y las respectivas ecuaciones de onda para campo eléctrico y magnético respectivamente:

$$\nabla^2 \tilde{E} + \varepsilon\mu\omega^2 \tilde{E} = 0$$

$$\nabla^2 \tilde{H} + \varepsilon\mu\omega^2 \tilde{H} = 0$$

3.2. Ondas planas uniformes

Este tipo de ondas armónicas son descritas por la relación

$$\mathbf{E}(r, t) = E_0 e^{j(\omega t - kr)}$$

o en su forma fasorial compleja:

$$\tilde{\mathbf{E}}(r) = \tilde{E}_0 e^{-jkr}$$

Son uniformes porque su amplitudes son siempre constantes.

La k

En este caso, recuerda que k es el *número de onda* y siempre cumple la siguiente igualdad $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$.

A partir del número de onda puedo sacar también la velocidad de propagación: $V_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Con la ley de Faraday puedo sacar el campo magnético asociado a este campo eléctrico:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\tilde{\mathbf{H}} \iff \tilde{\mathbf{H}} = \frac{j}{\omega\mu}\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}$$

Consideremos una onda plana que se propaga en la dirección $+z$ con la dirección del campo eléctrico apuntando el eje x :

$$\tilde{\mathbf{E}}(z) = \mathbf{a}_x E_0 e^{-jkz}$$

Vamos a calcular el campo magnético asociado:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \frac{j}{\omega\mu}\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = \frac{jE_0}{\omega\mu} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{-jkz} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{a}_y \frac{jE_0}{\omega\mu} (-jk) e^{-jkz}$$

Simplificando, y con $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ obtenemos:

$$\tilde{\mathbf{H}} = +\mathbf{a}_y E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e^{-jkz}$$

Observamos que la amplitud del campo magnético es proporcional al del campo eléctrico:

$$H_0 = E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

La proporción entre ambas amplitudes se denomina **impedancia intrínseca**:

$$\eta = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (\Omega)$$

La impedancia intrínseca en el vacío es

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377\Omega$$

El resultado que obtenemos es clave. Los campos $\tilde{\mathbf{E}}$ y $\tilde{\mathbf{H}}$ son perpendiculares entre sí y, a su vez, perpendiculares a la dirección en que viajan. Esta es la definición de una onda *TEM* (Transversal ElectroMagnética)

3.3. Efecto Doppler

No sería la primera vez que, caminando por la ciudad, se aprecia la sirena de una ambulancia. Cuando una ambulancia con la sirena encendida (fuente) se acerca hacia nosotros, percibimos el pitido de una forma más aguda, a diferencia de cuando esta se aleja de nosotros. ¿Qué sucede? El movimiento de la ambulancia da lugar a que las ondas ya transmitidas sean aplastadas por las nuevas emitidas (cambio en las longitudes de onda). En el sentido de avance de la ambulancia, las ondas se comprimen, se aprecian más agudas, y en el sentido contrario, se dilatan, más graves.

Este fenómeno se denomina efecto Doppler, y acabamos de ejemplificarlo en una situación en el que la fuente se desplaza y el receptor permanece inmóvil.

Aunque, no necesariamente la ambulancia es la que ha de moverse. Si hubiese permanecido inmóvil, y nosotros estuviésemos corriendo hacia esta, también percibiríamos la diferencia de agudos y graves. Nosotros, como receptores, al avanzar en dirección y sentido hacia la ambulancia, chocamos más a menudo contra los frentes de onda, al alejarnos, lo contrario. También se daría si tanto la ambulancia, como nosotros, estuviésemos en movimiento.

Así que, formalmente, el efecto Doppler es el «cambio en la frecuencia de una onda como consecuencia del movimiento relativo entre emisor y receptor.»[4].

Podemos describir matemáticamente el fenómeno de la siguiente forma.

Definimos el periodo T de la onda producida por un emisor que se aleja (el signo es positivo) o acerca (el signo es negativo) hacia un observador inmóvil:

$$T = T_0 \mp \frac{\Delta x}{v_p}$$

T_0 es el periodo de la onda cuando el emisor se encuentra inmóvil, Δx la distancia que el emisor se ha desplazado en el tiempo T_0 y v_p es la velocidad de propagación de la onda. La relación entre Δx y v_p es el tiempo que se reduce para ir de cresta en cresta provocado por el movimiento del emisor.

Con $\Delta x = v_{emisor}T_0$, el periodo medido por un observador inmóvil es:

$$T = T_0 \mp \frac{T_0 v_{emisor}}{v_p} \iff T = \frac{T_0 v_p \mp T_0 v_{emisor}}{v_p} \iff T = T_0 \left(1 \mp \frac{v_{emisor}}{v_p} \right)$$

En términos de frecuencia, usando la relación $1/f = T$, obtengo:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_0} \left(1 \mp \frac{v_{emisor}}{v_p} \right) \iff f = f_0 \frac{v_p}{v_p \mp v_{emisor}}$$

Con lo que sabemos, vamos a construir la *Ecuación General del Efecto Doppler*. Solo tenemos que añadir el efecto del receptor. Mientras que la fuente en movimiento altera la longitud de onda real de la onda, el receptor en movimiento no cambia la onda, sino que altera la velocidad con la que se encuentra con esos frentes de onda.

Esto queda reflejado matemáticamente de la siguiente forma. Partimos de que la frecuencia de toda onda viene dada por la siguiente relación matemática $f' = v'_p/\lambda'$. Fijándonos en la expresión anterior, identificamos que $f_0 \frac{1}{v_p \mp v_{emisor}}$ es el inverso de longitud de la onda afectada por el movimiento. Reescribiéndola, obtengo que $\lambda' = \frac{v_p \mp v_{emisor}}{f_0}$. La velocidad de propagación de la onda v'_p será aquella con la que nos encontramos los frentes de onda, entonces $v'_p = v_p \pm v_{receptor}$. (Observa que antes hemos asumido que el observador o receptor permanecía inmóvil, es decir, $v_{receptor} = 0$.) Juntando las expresiones obtenemos:

$$f = f_0 \left(\frac{v_p \pm v_{receptor}}{v_p \mp v_{emisor}} \right)$$

Ahora, si asumimos que la velocidad del emisor es mucho menor que la de la onda ($v_{emisor} \ll v_p$), definimos una relación pequeña $\varepsilon = v_{emisor}/v_p \approx 0$. Aplicando la expansión de Taylor $(1+x)^{-1} \approx 1-x$, la expresión general se simplifica linealmente:

$$f = f_0 \left(1 \pm \frac{v_{emisor}}{v_p} \right)$$

Pero hemos contemplado solamente los casos en los que el emisor y el receptor se encuentran en la misma dirección. Considerando el ángulo θ que forman el vector velocidad del emisor y la línea que une el emisor con el observador:

$$f = f_0 \left(1 + \frac{v_{emisor} \cos \theta}{v_p} \right)$$

3.4. Polarización

Hasta ahora sabemos que, en las ondas transversales, el campo eléctrico, magnético y su dirección de propagación son perpendiculares entre sí. Dentro

de esta “limitación impuesta” por la perpendicularidad, tenemos bastante margen de estudio de fenómenos de interés. Resulta que el campo eléctrico puede apuntar a cualquier dirección manteniendo la perpendicularidad respecto a la propagación de la onda, y también puede girar en espiral siguiendo un patrón helicoidal.

A este fenómeno lo denominamos *polarización* de una onda electromagnética (dirección y la helicidad de la oscilación del campo eléctrico $\mathbf{E}$).

Si partimos de una onda electromagnética no polarizada (aquella en el que el campo eléctrico apunta, de forma aleatoria y rápida, a todas las direcciones posibles del plano perpendicular a la dirección de propagación), todo campo eléctrico $\tilde{E}$ propagado, a través del principio de superposición, se puede descomponer en dos componentes polarizados de iguales proporciones, uno paralelo al eje de transmisión y otro perpendicular.

3.4.1. Polarización lineal

Empezamos estudiando el tipo de polarización más sencillo. Se dice que una onda está polarizada linealmente cuando el campo eléctrico $\mathbf{E}$ oscila a lo largo de una línea recta fija en el plano perpendicular a la dirección de propagación.

Para una onda unitaria que se propaga en la dirección $+z$, podemos definir dos estados de polarización lineal:

$$\tilde{\mathbf{E}}_x(z) = \mathbf{a}_x E_{0,x} e^{-jkz} \iff \mathbf{E}_x(t, z) = \mathbf{a}_x |E_{0,x}| \cos(\omega t - kz + \phi_x)$$

y

$$\tilde{\mathbf{E}}_y(z) = \mathbf{a}_y E_{0,y} e^{-jkz} \iff \mathbf{E}_y(t, z) = \mathbf{a}_y |E_{0,y}| \cos(\omega t - kz + \phi_y)$$

donde $E_{0,x}$ y $E_{0,y}$ son las amplitudes de ambos componentes, y $\mathbf{a}_x$ y $\mathbf{a}_y$ los correspondientes vectores unitarios.

Con esta definición hemos asumido que las ondas están perfectamente alineadas con nuestros ejes cartesianos, sin embargo, esto no necesariamente ha de ser una norma. Las ondas pueden estar polarizadas linealmente formando un ángulo θ respecto al eje horizontal:

$$\tilde{\mathbf{E}} = (\mathbf{a}_x \cos \theta + \mathbf{a}_y \sin \theta) E_0 e^{-jkz}$$

Además, mientras se cumpla el criterio de perpendicularidad entre dos estados de polarización, podremos utilizarlos para describir cualquier otro estado de polarización, ya que formarán lo que se llama **base ortogonal**. Habitualmente, se suelen utilizar como base los estados $\tilde{\mathbf{E}}_x$ y $\tilde{\mathbf{E}}_y$.

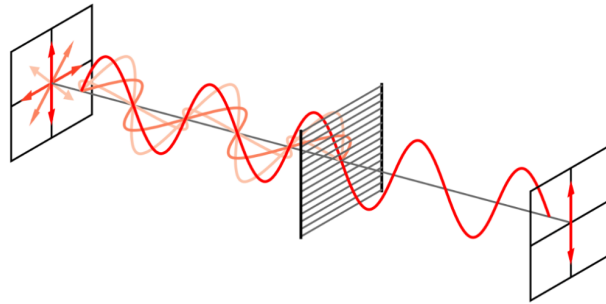


Figura 3.1: Fuente: <https://fisicotronica.com/polarizacion-de-ondas-electromagneticas/>

3.4.2. Polarizadores

Podemos controlar el estado de la polaridad de una onda a través de una herramienta llamada *polarizador*, cuyo rol es permitir la transmisión de ondas polarizadas en una sola dirección. En la figura 3.1 podemos entender este concepto de una forma muy visual. Dicho de otro modo, permite la transmisión de una componente polarizada y bloquea la perpendicular.

Observando la figura 3.1, apreciamos una onda no polarizada que atraviesa un polarizador con un eje de transmisión paralelo a $\mathbf{a}_y$ (es decir, que los alambres son paralelos al eje horizontal).

Cuando la componente del campo eléctrico paralela a los alambres incide sobre estos, provoca una interacción en los electrones libres, dando lugar a un campo que bloquea dicha componente. Por el contrario, la componente perpendicular no genera la interacción, atravesando el polarizador sin alteraciones.

La onda resultante es una polarizada linealmente respecto al eje vertical y presenta una amplitud menor, pues el campo eléctrico perpendicular al eje de transmisión fue bloqueado.

Recurso audiovisual

El siguiente vídeo didáctico de la Universitat Politècnica de València muestra ejemplos animados sobre el funcionamiento de un polarizador: <https://www.youtube.com/watch?v=rs9kV7CLcvk>

Con esta idea intuitiva sobre el funcionamiento de un polarizador, consideremos ahora que el eje de transmisión del polarizador es paralelo a $\mathbf{a}_x$, para poder simplificar y facilitar la tarea de visualización del siguiente concepto.

Nuevamente, hemos asumido que los polarizadores están perfectamente

FIGURE 8.18 The x - y coordinate system rotated into the x' - y' coordinate system. In (a) the projection of unit vectors is shown; in (b) the transformation of field components.

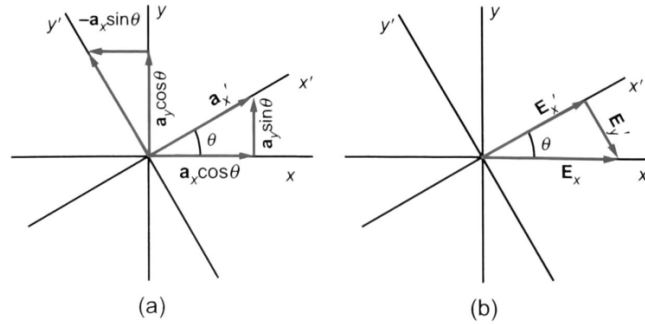


Figura 3.2: Esta figura ha sido fotografiada de la obra de Elliot.

alineados con nuestros ejes verticales y horizontales. ¿Qué sucede en los casos en los que se encuentran rotados a un ángulo θ respecto a $\mathbf{a}_x$? Elliot lo explica a la perfección:

«Proyectemos el estado de polarización de una onda incidente en los ejes de un polarizador. Los llamaremos x' e y' . La transformación de las coordenadas respecto los ejes x - y a los nuevos ejes x' - y' se puede realizar con una simple rotación, de un ángulo θ , sobre el eje z . Con geometría simple, tenemos $\mathbf{a}'_x = \mathbf{a}_x \cos \theta + \mathbf{a}_y \sin \theta$ y que $\mathbf{a}'_y = -\mathbf{a}_x \sin \theta + \mathbf{a}_y \cos \theta$, tal y como ilustra la figura 3.2(a). En las coordenadas primas, podemos expresar $\mathbf{E}_x$ como $E'_x \mathbf{a}'_x + E'_y \mathbf{a}'_y$, como ilustra la figura 3.2(b), donde $E'_x = E_x \cos \theta$ y $E'_y = -E_x \sin \theta$. Dado que el polarizador solo transmite el componente $E'_x \mathbf{a}'_x$, la amplitud de la onda transmitida es reducida por un factor $\cos \theta$. Además, el estado de polarización de la onda transmitida ha sido alterada. La polarización es lineal, como antes, pero ahora está alineada con el eje x' .»

3.4.3. Polarización circular

Con la polarización lineal hemos asumido que las componentes polarizadas de una onda electromagnética estaban en fase (o con un desfase de π radianes). Si se cumple que la amplitud de las componentes polarizadas son iguales y el desfase que hay entre estas es $\pi/2$ radianes, estaremos ante un caso de polarización circular.

Vamos a definir los estados ortogonales que usaremos para describir las polarizaciones circulares. Según el signo del desfase distinguimos dos estados, a derechas ($\mathbf{a}_R$) o a izquierdas $\mathbf{a}_L$:

$$\mathbf{a}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y)$$

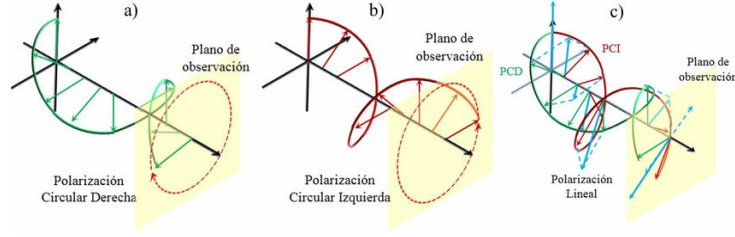


Figura 3.3: fuente: Estudio de la actividad óptica de sustancias orgánicas - Scientific Figure on ResearchGate.[5]

$$\mathbf{a}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y)$$

El número complejo j es el que añade el desfase de $\pi/2$ radianes, siendo $+\pi/2$ radianes $+90^\circ$ y $-\pi/2$ radianes -90° .

Una onda electromagnética polarizada a derechas viene representada por la expresión matemática:

$$\tilde{\mathbf{E}}_R = \mathbf{a}_R E_0 e^{-jkz} \iff \frac{E_0}{\sqrt{2}} [\mathbf{a}_x \cos(\omega t - kz) + \mathbf{a}_y \sin(\omega t - kz)]$$

Una polarizada a izquierdas por:

$$\tilde{\mathbf{E}}_L = \mathbf{a}_L E_0 e^{-jkz} \iff \frac{E_0}{\sqrt{2}} [\mathbf{a}_x \cos(\omega t - kz) - \mathbf{a}_y \sin(\omega t - kz)]$$

Dichas ondas quedan representadas en la figura 3.3.

Como $\tilde{\mathbf{E}}_R$ y $\tilde{\mathbf{E}}_L$ forman una base ortogonal, podemos usarlos, de forma muy similar a los vectores $\tilde{\mathbf{E}}_x$ y $\tilde{\mathbf{E}}_y$. Por ejemplo, combinando $\tilde{\mathbf{E}}_R$ y $\tilde{\mathbf{E}}_L$ podemos representar una polarización lineal¹

3.4.4. Polarización elíptica

No podemos cerrar esta sección sobre polarización sin dedicar un espacio a este tipo de polarización. Cuando no se cumplen los criterios para producirse una polarización lineal (desfase 0 o π), polarización circular (desfase $\pi/2$ y amplitudes iguales), se da la polarización elíptica.

¹Quitando las expresiones de campo, y quedándonos con nuestros vectores $\mathbf{a}_R$ y $\mathbf{a}_L$, al sumarlos: $\mathbf{a}_R + \mathbf{a}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y) = \sqrt{2}\mathbf{a}_x$. Observamos que el campo resultante da lugar a una polarización lineal horizontal. Si añadimos un desfase de π , podemos obtener también la polarización lineal vertical: $\mathbf{a}_R - \mathbf{a}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y) = -j\sqrt{2}\mathbf{a}_y$.

3.5. Ondas planas en medios con pérdidas

Hasta ahora, nuestro estudio se ha limitado a comprender el comportamiento de las ondas planas en medios perfectos (lossless media, $\sigma = 0$). Si bien estos escenarios son fundamentales para establecer las bases del modelado matemático, representan idealizaciones que rara vez se encuentran en la práctica. En la realidad física, los medios materiales disipan parte de la energía de la onda electromagnética en forma de calor. Por ello, ampliaremos nuestro análisis físico para comprender cómo funcionan las ondas en medios con pérdidas. Empezaremos distinguiendo dos medios: dieléctricos con pérdidas y muy buenos conductores no perfectos.

3.5.1. Densidad de potencia disipada

Materiales dieléctricos

Cuando propagamos una onda a través de un dieléctrico, sabemos que las cargas dentro de este medio no son libres, están fuertemente ligadas entre sí. Al aplicarse un campo eléctrico sobre estas, cada carga es desplazada en respuesta a la acción del campo, pero sin perder los vínculos que los une con otros. La primera respuesta de estas cargas es dar lugar a un campo que se opone al aplicado, provocando un dipolo eléctrico oscilante (polarización).

Definimos la polarización de un material dieléctrico como los instantes en los que surgen esos dipolos eléctricos:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{k=1}^{n\Delta v} \mathbf{p}_k$$

donde n se define como la densidad de dipolos en el medio dieléctrico, $n\Delta v$ como el número de dipolos en el volumen Δv y $\mathbf{p}_k$ es el momento dipolar eléctrico del k -ésimo dipolo. Reescribiendo la expresión de la polarización en términos del momento dipolar molecular promedio, obtenemos:

$$\mathbf{P} = n\langle \mathbf{p} \rangle = nq\langle \mathbf{r} \rangle$$

donde $\langle \mathbf{r} \rangle$ indica la medida de desplazamiento de las cargas. Ahora, sabemos que cuando un campo eléctrico varía respecto al tiempo, también lo hace la polarización. En medios lineales e isotrópicos (la polarización $\mathbf{P}$ es paralela al campo eléctrico $\mathbf{E}$) y cuando el campo eléctrico es armónico, la polarización es:

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}_0 e^{j\omega t}$$

Es decir, que cuando el campo eléctrico varía senoidalmente respecto al tiempo t con una determinada frecuencia ω , lo hace también la polarización del medio con la misma frecuencia ω . χ_e es la susceptibilidad del medio. Si la oscilación del campo eléctrico $\mathbf{E}$ y la de la polarización $\mathbf{P}$ están en fase, χ_e será real, y por tanto, el trabajo neto será 0. De la siguiente forma se ve con más facilidad.

Cuando aplicamos una fuerza $\mathbf{F}$ a un objeto con una velocidad $\mathbf{v}_k$, la ratio a la que aumenta la energía aumenta en ese cuerpo viene dado por $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_k$. Podemos definir así como la ratio de trabajo realizado por el sistema por unidad de volumen Δv como:

$$P_v^{\text{abs}}(t) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{k=1}^{n\Delta v} \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v}_k(t)$$

Muchas veces nos interesa saber más el promedio de la densidad de potencia absorbida que la densidad de potencia instantánea:

$$\overline{P_v^{\text{abs}}} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{k=1}^{n\Delta v} \overline{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_k}$$

Como estamos trabajando con fuerzas eléctricas, $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, esta es igual para todas las cargas contenidas en el volumen Δv , por tanto, podemos sacar la fuerza de la sumatoria y reescribir la expresión como

$$\overline{P_v^{\text{abs}}} = n \overline{\mathbf{F} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle}$$

con $\langle \mathbf{v} \rangle$ siendo la velocidad promedio de las cargas dentro del volumen Δv :

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \lim_{n\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{k=1}^{n\Delta v} \mathbf{v}_k$$

Como la fuerza es armónica, la única velocidad $\langle \mathbf{v} \rangle$ que contribuye al promedio temporal es la componente armónica a la misma frecuencia que el campo. La velocidad está relacionada con la polarización inducida en el medio:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{nq} \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

Sustituyendo la expresión de fuerza y velocidad en la ecuación $\overline{P_v^{\text{abs}}} = n \overline{\mathbf{F} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle}$ obtengo la potencia promedio absorbida en función de la polarización $\mathbf{P}$ y el campo eléctrico $\mathbf{E}$:

$$\overline{P_v^{\text{abs}}} = \overline{\mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dt}}$$

Cuando la polarización $\mathbf{P}$ y $\mathbf{E}$ se encuentran en fase, χ_e es real y la potencia promedio absorbida por el medio es:

$$\overline{P_v^{\text{abs}}} = \overline{\mathbf{E}_0 \cos(\omega t) \cdot \frac{d}{dt}(\varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}_0 \cos(\omega t))} = -\varepsilon_0 \omega \chi_e |\mathbf{E}_0|^2 \overline{\cos(\omega t) \sin(\omega t)} = 0$$

El valor de $\overline{\cos(\omega t) \sin(\omega t)}$ es cero:

$$\overline{\cos(\omega t) \sin(\omega t)} = T^{-1} \int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt = (2T)^{-1} \int_0^T \sin(2\omega t) dt = \left. \frac{-\cos(2\omega t)}{4\omega T} \right|_0^T = 0$$

Entonces,

$$\overline{P_v^{\text{abs}}} = -\varepsilon_0 \omega \chi_e |\mathbf{E}_0|^2 \overline{\cos(\omega t) \sin(\omega t)} = 0$$

Llegamos a la misma conclusión que antes. Si el campo eléctrico $\mathbf{E}$ y la polarización $\mathbf{P}$ están en fase, el trabajo neto será 0.

¿Qué sucede cuando la polarización se encuentra desfasada del campo eléctrico? En esencia, cuando calculamos el promedio $\overline{\mathbf{E} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle}$ en un ciclo de oscilación, este será positivo, es decir, que el campo eléctrico $\mathbf{E}$ está realizando trabajo sobre el medio.

Para reflejar el desfase entre la polarización y el campo eléctrico, haremos que la susceptibilidad del medio χ_e pueda ser complejo:

$$\chi_e = \chi_e' - j\chi_e''$$

Cuando escribimos χ_e de esta manera,

$$\mathbf{P}(t) = \Re [\varepsilon_0 (\chi_e' - j\chi_e'') \mathbf{E}_0 e^{j\omega t}] = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 [\chi_e' \cos(\omega t) + \chi_e'' \sin(\omega t)]$$

La polarización sigue siendo senoidal, pero desfasado por una fase $\varphi = \tan^{-1}(\chi_e''/\chi_e')$. La ratio promedio de trabajo realizado en un ciclo completo por la polarización es:

$$\overline{P_v^{\text{abs}}} = \overline{\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}} = \overline{\mathbf{E}_0 \cos(\omega t) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \mathbf{E}_0 [\chi_e' \cos(\omega t) + \chi_e'' \sin(\omega t)])}$$

$$\overline{P_v^{\text{abs}}} = \varepsilon_0 \omega |\mathbf{E}_0|^2 \left[-\cancel{\chi_e' \cos(\omega t) \sin(\omega t)} + \chi_e'' \overline{\cos^2(\omega t)} \right]$$

Simplificando,

$$\overline{P_v^{\text{abs}}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \omega \chi_e'' |\mathbf{E}_0|^2$$

Es decir, que la parte imaginaria de la susceptibilidad χ_e'' está relacionado con la absorción de potencia del dieléctrico.

Ahora bien, si reescribimos estas expresiones en términos del campo de desplazamiento $\mathbf{D}$, que para un medio lineal, absorbente, dieléctrico es:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

y cuando lo escribimos en notación fasorial o dependiente del tiempo, usamos la permitividad compleja:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 (\chi_e' + j\chi_e'') \mathbf{E} = (\varepsilon' - j\varepsilon'') \mathbf{E}$$

donde $\varepsilon' = \varepsilon_0(1 + \chi_e')$ y $\varepsilon'' = \varepsilon_0 \chi_e''$. La parte imaginaria de la permitividad es lo que provoca el desfase del campo $\mathbf{D}$ respecto a $\mathbf{E}$, provocando la atenuación de la amplitud de la onda que se propaga a través de este medio.

La expresión de la potencia absorbida por el medio en función del campo de desplazamiento $\mathbf{D}$ queda como:

$$\overline{P_v^{\text{abs}}} = \overline{\mathbf{E}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{D}(t) - \varepsilon_0 \mathbf{E}(t)]}$$

Para campos armónicos, donde $\mathbf{E}(t)$ y $\partial \mathbf{E}(t)/\partial t$ siempre presentan un desfase de $\pi/2$, obtenemos que el valor promedio del producto es cero, obteniendo:

$$\overline{P_v^{\text{abs}}} = \overline{\mathbf{E}(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t}} = \overline{\mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{J}_d(t)}$$

Si escribimos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{J}_d(t)$ en forma fasorial y simplificamos, obtenemos que:

$$\overline{P_v^{\text{abs}}} = \frac{1}{2} \omega \varepsilon'' |\tilde{\mathbf{E}}|^2$$

Materiales buenos conductores

Los portadores de cargas se encuentran libres y sin restricciones dentro del conductor con una densidad de corriente $\mathbf{J}_v$ es proporcional al campo eléctrico $\mathbf{E}$ aplicado:

$$\mathbf{J}_v = \sigma \mathbf{E}$$

siendo σ la conductividad del conductor.

Usando el modelo de Drude para electrones libres en un conductor, tenemos que la densidad de corriente es:

$$\mathbf{J}_v(\mathbf{r}) = \rho_v \mathbf{v} = qn\mathbf{v} = -en_e \mathbf{v}$$

la igualdad final es específica de los electrones e incluye la carga del electrón y la densidad de electrones. En un conductor o plasma, los electrones son portadores libres, y se pueden mover libremente bajo la influencia de un campo eléctrico externo $\mathbf{E}$. El movimiento de los electrones se caracterizan por la siguiente expresión obtenida con la segunda ley de Newton:

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - m_e \gamma \mathbf{v}$$

la parte de la izquierda contiene la masa del electron por la aceleración de estos, y la parte derecha contiene la fuerza eléctrica y la de amortiguación, siendo γ la ratio de amortiguación del electrón debido a las colisiones con la red atómica (metal) o el gas (plasma). Cuando el campo eléctrico oscila senoidalmente a una frecuencia ω , la velocidad promedio del electrón también lo hace:

$$\mathbf{v}_0 = \frac{-e\mathbf{E}_0}{m_e(j\omega + \gamma)}$$

La densidad de corriente será:

$$\mathbf{J}_v = -en_e \mathbf{v} = \frac{n_e e^2 (\gamma - j\omega)}{m_e (\gamma^2 + \omega^2)} \mathbf{E}_0$$

La parte real de la expresión es la conductividad del conductor:

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \gamma}{m_e (\gamma^2 + \omega^2)}$$

Aplicando la ley de Ampère para una onda armónica en este medio ($\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{J}}_v + j\omega \tilde{\mathbf{D}}$), con $\tilde{\mathbf{D}} = \epsilon \tilde{\mathbf{E}}$ y $\mathbf{J}_v = \frac{n_e e^2 (\gamma - j\omega)}{m_e (\gamma^2 + \omega^2)} \mathbf{E}_0$, tengo que:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = j\omega \left\{ \left(\varepsilon'_b - \frac{n_e e^2 (\gamma - j\omega)}{m_e (\gamma^2 + \omega^2)} \right) - j \left(\varepsilon''_b + \frac{n_e e^2 \gamma}{m_e \omega (\gamma^2 + \omega^2)} \right) \right\} \tilde{\mathbf{E}}_0$$

donde ε_b es la permitividad del material debido al vínculo de las cargas y los iones positivos, así que, la parte real de la permitividad efectiva ε es:

$$\varepsilon' = \varepsilon'_b - \frac{n_e e^2}{m_e (\gamma^2 + \omega^2)}$$

y la parte imaginaria:

$$\varepsilon'' = \varepsilon''_b + \frac{n_e e^2 \gamma}{m_e \omega (\gamma^2 + \omega^2)}$$

Podemos reescribir $\frac{n_e e^2 \gamma}{m_e \omega (\gamma^2 + \omega^2)}$ como σ/ω .

Para semiconductores (conductividad modesta y ratio de amortiguación elevada), la permitividad efectiva es:

$$\varepsilon = \varepsilon_b - j \frac{\sigma}{\omega}$$

Para materiales de baja densidad (baja ratio de amortiguación), $\varepsilon_b = \varepsilon_0$, la parte real de la permitividad es:

$$\varepsilon' \approx \varepsilon_0 - \frac{n_e e^2}{m_e \omega^2}$$

valido para frecuencias $\omega > \gamma$. Usando la frecuencia de plasma $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}$, tengo que la permitividad es:

$$\varepsilon' \approx \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

Cuando ω es menor que la frecuencia de plasma, la parte real de la permitividad es negativa, y la propagación de ondas electromagnéticas es inhibidas.

Para frecuencias muy por debajo de la frecuencia de plasma ω_p , la conductividad es real, y la velocidad promedio v de las cargas está completamente en fase con el campo eléctrico $\mathbf{E}(t)$, donde el campo eléctrico realiza un trabajo positivo en las cargas en cada cuarto de un ciclo. La ratio promediada de trabajo ejercidas en las cargas es:

$$\overline{P_v^{\text{abs}}} = \overline{\mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{J}_v(t)} = \overline{(\mathbf{E}_0 \cos(\omega t)) \cdot (\sigma \mathbf{E}_0 \cos(\omega t))}$$

Esta expresión se simplificada y en expresión fasorial queda como:

$$\overline{P_v^{\text{abs}}} = \frac{1}{2} \sigma |\tilde{\mathbf{E}}|^2$$

Expresión general válida para cualquier medio

¿Para qué hemos necesitado tantas demostraciones? Primero decir que la energía, y consecuentemente la amplitud de la onda, siempre disminuyen. Y segundo, podemos unificar las expresiones de la potencia absorbida de los materiales dieléctricos y buenos conductores en una general que contempla ambas:

$$\overline{P_v^{\text{abs}}} = \frac{1}{2} \Re \left[\tilde{\mathbf{E}} \cdot (\tilde{\mathbf{J}}_v + \tilde{\mathbf{J}}_d)^* \right] = \frac{1}{2} (\sigma + \omega \varepsilon'') |\tilde{\mathbf{E}}|^2$$

El asterisco * representa el conjugado de la expresión compleja.

Las pérdidas de energía están habitualmente caracterizadas por un parámetro llamado **tangente de pérdidas**. Para medios dieléctricos se define como:

$$\tan \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$$

y para buenos conductores como:

$$\tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}$$

3.5.2. Ecuación de ondas en medios con pérdidas

Consideramos las ondas armónicas tiempo-dependientes para el campo eléctrico y magnético:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}$$

en un entorno lineal, isotrópico, y neutral ($\rho_v = 0$). Escribiremos las expresiones en forma fasorial de aquí en adelante, para simplificar la escritura. Las pérdidas las asociaremos con una densidad de corriente $\mathbf{J}_v = \sigma \mathbf{E}$ y un campo de desplazamiento desfasado $\partial \mathbf{D} / \partial t$. Con estas condiciones, las ecuaciones de Maxwell serán:

- Ley de Gauss: $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0$
- No hay cargas magnéticas: $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = 0$

- Ley de Faraday: $\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$
- Ley de Ampère: $\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \sigma\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + j\omega\mu\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$

Con las ecuaciones de Maxwell saco las expresiones de onda que se propagan a través este medio:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 e^{-j\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}}$$

donde $\boldsymbol{\kappa}$ representa el equivalente complejo del vector de onda $\mathbf{k}$ utilizado en medios sin pérdidas. Aunque sería posible mantener la notación $\mathbf{k}$, adoptaremos $\boldsymbol{\kappa}$ para distinguir explícitamente su naturaleza compleja.

$$\kappa = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}$$

Simplificaremos la expresión de κ de la siguiente forma:

$$\kappa = \beta - j\alpha$$

donde $\beta = \Re[\kappa]$ y $\alpha = -\Im[\kappa]$, pudiendo reescribir la expresión de campo eléctrico², asumiendo que la onda se propaga en la dirección +z, como

$$E(z) = E_0 e^{-j\kappa z} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

Prestando atención a β , si consideramos una permitividad real ($\varepsilon'' = 0$) y una conductividad nula ($\sigma = 0$), recuperamos el término de fase $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ que hemos visto antes. β se define como la **constante de fase**, describiendo las oscilaciones senoidales de la onda. Definimos así la longitud de onda como

$$\lambda = 2\pi/\beta$$

Por otro lado, α representa las pérdidas de energía que provoca el medio y se define como la ratio espacial a la que la amplitud de la onda decrece. La amplitud decrece exponencialmente, y en una distancia $\Delta z = \alpha^{-1}$, la amplitud se reduce $1/e$. α recibe el nombre de **constante de atenuación**.

Por conveniencia, se define la **constante de propagación** γ :

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\kappa$$

²Observa que $\boldsymbol{\kappa}$ con negrita implica que κ tiene versor.

Tanto κ como γ se utilizan, y deberemos usar la que más nos convenga en cada caso, pues la diferencia entre ambos consiste en un factor j .

Respecto a la impedancia intrínseca del medio, la definimos como

$$\eta = \frac{\tilde{E}}{\tilde{H}} = \frac{\omega\mu}{\kappa} = \frac{\omega\mu}{\beta - j\alpha} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon} \left[\frac{1}{1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \right]}$$

(presta atención porque $\tilde{E}$ y $\tilde{H}$ no son vectores, ¡son las amplitudes!). Aunque nos interesa volver a su definición inicial

$$\eta = |\eta|e^{j\theta_\eta} = \frac{\tilde{E}}{\tilde{H}}$$

donde $|\eta|$ se define como la ratio de las magnitudes $|\tilde{E}|/|\tilde{H}|$,

$$|\eta| = \frac{\sqrt{\mu}}{[\varepsilon'^2 + (\varepsilon'' + \sigma/\omega)^2]^{1/4}}$$

y θ_η como la diferencia de fase entre el campo eléctrico $\tilde{E}$ y el magnético $\tilde{H}$. Mientras que μ sea real, θ_η siempre será menos la fase de κ , es decir, $\theta_\eta = -\tan^{-1}(\alpha/\beta)$.

Finalmente, la velocidad de fase la obtendremos de la expresión no fasorial del campo eléctrico $E(z, t) = \Re [E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}] = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$.

Si tenemos que en t_1 z_1 está en su máximo, y en t_2 z_2 también, entonces

$$\omega t_1 - \beta z_1 = \omega t_2 - \beta z_2$$

es decir, que en tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, para mantenernos en el mismo punto o sitio en la onda, nos habremos desplazado una distancia $\Delta z = z_2 - z_1$, pudiendo así definir la velocidad de fase como:

$$v_p = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta}$$

Observamos que, a diferencia de los medios sin pérdidas, la velocidad de fase no necesariamente coincidirá con la de propagación de la onda.

3.5.3. Medios dieléctricos absorbentes (no conductores)

Salto de sub-apartado

Este apartado se centra exclusivamente en la obtención de las expresiones matemáticas de β , α , η y v_p para la propagación de ondas a través de medios dieléctricos no conductores. Quedan reflejados en el cuadro resumen 3.1.

3.5.4. Buen conductor

Salto de sub-apartado

Este apartado se centra exclusivamente en la obtención de las expresiones matemáticas de β , α , η y v_p para la propagación de ondas a través de medios buenos conductores. Quedan reflejados en el cuadro resumen 3.1.

3.5.5. Expresiones resumidas en una tabla

Cuadro 3.1: Resumen de expresiones para β , α , η y v_p para la propagación de ondas a través de diferentes medios. $\kappa = \omega\sqrt{\epsilon\mu}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} = \beta - j\alpha$, $|\epsilon| = \sqrt{(\epsilon')^2 + (\epsilon'')^2}$

	Forma general	Dieléctricos no conductores		Buenos conductores
		General	Poco absorbentes ($\epsilon'' \ll \epsilon'$)	
β	$\Re[\kappa]$	$\omega\sqrt{\frac{(\epsilon' + \epsilon)\mu}{2}}$	$\omega\sqrt{\epsilon'\mu} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right]$	$\sqrt{\pi f \mu \sigma}$
α	$-\Im[\kappa]$	$\omega\epsilon''\sqrt{\frac{\mu}{2(\epsilon' + \epsilon)}}$	$\frac{\omega\epsilon''}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}$	$\sqrt{\pi f \mu \sigma}$
η	$\frac{\omega\mu}{\kappa}$	$\sqrt{\frac{\mu}{(\epsilon' - j\epsilon'')}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left[1 + \frac{j\epsilon''}{2\epsilon'}\right]$	$\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}(1 + j)$
v_p	$\frac{\omega}{\beta}$	$\sqrt{\frac{2}{(\epsilon' + \epsilon)\mu}}$	$\frac{1}{\sqrt{\epsilon'\mu}} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right]$	$\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$

3.6. Flujo de potencia. Vector de Poynting

Sabemos que las ondas transportan energía, pero, cuando afrontan un medio con pérdidas, las amplitudes se ven atenuadas y... ¿la energía?

Consideremos una región del espacio simple (homogéneo e isotrópico) en el que coexisten un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y magnético $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ general, permitiendo corrientes en el entorno. Definimos del mismo modo la permitividad ε , permeabilidad μ y la conductividad σ sin establecer una expresión matemática.

Para encontrar una relación que describa el balance energético, analizamos la divergencia del producto vectorial de los campos:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

aplicando una identidad vectorial diferencial, tengo que $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$ y con la *Ley de Faraday* $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ y la *Ley de Ampère* $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_v + \partial \mathbf{D} / \partial t$, obtengo que

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \mathbf{E} \cdot \left(\mathbf{J}_v + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

En medios simples,

$$\mathbf{E} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})$$

y

$$\mathbf{H} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})$$

Sustituyendo estos términos e integrando sobre la región del espacio, tengo que

$$\int_v \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv = - \int_v \left\{ \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_v + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \right\} dv$$

y aplicando el teorema de la divergencia a la parte izquierda de la ecuación, reordenando términos y invirtiendo el orden de la integración y el diferencial, obtengo un resultado conocido como el **Teorema de Poynting**:

$$\oint_s \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{d}{dt} \int_v \left\{ \frac{\varepsilon}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \frac{\mu}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) \right\} dv - \int_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_v$$

La primera parte de la expresión $-\frac{d}{dt} \int_v \left\{ \frac{\varepsilon}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \frac{\mu}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) \right\} dv$ calcula la energía total almacenada en el campo eléctrico y magnético, mientras que la segunda parte $\int_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_v$ nos da la densidad de potencia disipada, es decir, la tasa en la que los campos realizan trabajo en la región.

Con la información de la parte derecha del teorema, puedo averiguar la superficie sobre la que se integra $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$. La energía que transportan los campos va disminuyendo, una forma sería a raíz de la interacción con las cargas que hay en el volumen ($\mathbf{J}_v \cdot \mathbf{E}$) y la otra debido a que las ondas electromagnéticas transportan energía fuera de la región, y esta última, es la interpretación correcta de esa disminución.

A la cantidad $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ se le conoce como el **vector de Poynting**

$$\mathcal{P}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r})$$

La integral de $\mathcal{P}(t, \mathbf{r})$ nos da la ratio total de energía que abandona la región, así que $\mathcal{P}$ es interpretada como el flujo de potencia por unidad de area sobre la superficie. Al vector de Poynting se le suele llamar densidad de potencia de una onda o intensidad de la onda en óptica.

3.6.1. Densidad de potencia promediada en el tiempo

La expresión anterior nos determina el vector de Poynting instantáneo, y en diversas ocasiones, nos interesará más saber el promedio temporal del vector de Poynting como parámetro para caracterizar las ondas electromagnéticas.

Para obtener la densidad de potencia promedio, tendremos que promediar la expresión del vector de Poynting instantáneo sobre un ciclo de oscilación

$$\overline{\mathcal{P}(\mathbf{r})} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(t, \mathbf{r}) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) dt$$

con $T = 2\pi/\omega$ siendo el periodo del campo.

Caso particular de las ondas armónicas

Para simplificar la notación, consideramos una onda que se propaga en la dirección z . El campo eléctrico se definirá como $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$ y el campo magnético como $\mathbf{H}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta)$, siendo θ_η la diferencia de fase entre ambos campos. Entonces, la expresión anterior queda reescrita como

$$\overline{\mathcal{P}(\mathbf{r})} = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 e^{-2\alpha z} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) dt$$

Simplificando tengo que

$$\overline{\mathcal{P}(\mathbf{r})} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 e^{-2\alpha z} \cos(\theta_\eta)$$

La exponencial alberga la ratio con la que se atenúa la densidad de potencia de la onda. La aparición del 2 en el exponente se debe a que la potencia es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo, entonces, como en el vector de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ estamos multiplicando dos términos que decaen

$$\text{Potencia} \propto (e^{-\alpha z}) \cdot (e^{-\alpha z}) = e^{-2\alpha z}$$

La potencia decae dos veces más rápido que la amplitud del campo.

De forma fasorial, la expresión resulta como:

$$\overline{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \Re [\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*]$$

La magnitud de la densidad de potencia la puedo escribir de forma compacta

$$\overline{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*| = \frac{|\mathbf{E}|^2}{2|\eta|} \cos(\theta_\eta)$$

Obteniendo para medios sin pérdidas, donde η es real, la siguiente expresión

$$\overline{\mathcal{P}} = \frac{E_0^2}{2\eta}$$

3.6.2. Teorema de Poynting para ondas armónicas

Dado que trabajamos con ondas armónicas, derivamos el Teorema de Poynting de alguna forma que fuese válido para campos armónicos para medios lineales, homogéneos y absorbentes.

Para ello, comenzaremos considerando la divergencia del vector de Poynting:

$$\nabla \cdot [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})] = \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) \cdot [\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})] - \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot [\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})]$$

Con la *Ley de Faraday* ($\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$) y la *Ley de Ampère* ($\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{J}}_v^* - j\omega\varepsilon^*\tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r})$) tengo que

$$\nabla \cdot [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})] = -j\omega\mu|\tilde{\mathbf{H}}|^2 - \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_v^*(\mathbf{r}) + j\omega\varepsilon^*|\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})|^2$$

En cualquier volumen donde estas expresiones sean finitos, integrando sobre el volumen en ambos lados, dividiendo entre dos y aplicando el *Teorema de la Divergencia*, tengo que:

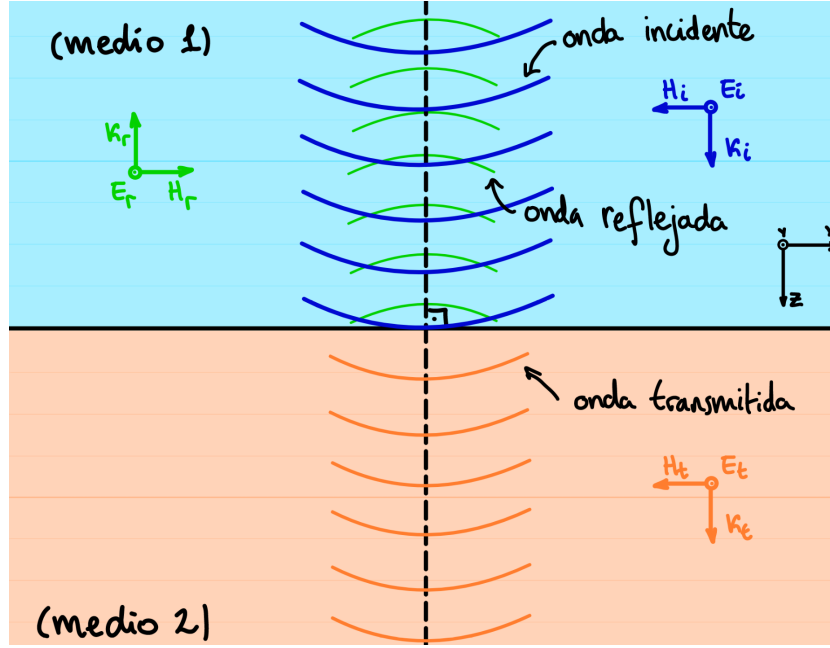


Figura 3.4: Incidencia Normal de una onda - Elaboración propia

$$\oint_s \bar{\mathcal{P}} \cdot ds = \frac{j\omega}{2} \int_v [\epsilon^* |\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})|^2 - \mu |\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})|^2] dv - \frac{1}{2} \int_v \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_v^*(\mathbf{r}) dv$$

$\bar{\mathcal{P}}$ se define como la ratio promediado a la cual la ondas sacan energía del volumen, y de la parte derecha del teorema, la parte imaginaria resulta como la energía almacenada y la parte real, como la potencia disipada.

3.7. Reflexión de ondas planas

Hemos estudiado hasta ahora el comportamiento de una onda a través de un solo medio, pero, ¿qué sucede cuando este llega al final de este? Sabemos que, cuando la onda llega e incide sobre la superficie de separación entre el primer medio y el segundo, una parte de la onda se transmite y la otra se refleja.

3.7.1. Incidencia normal

Empezamos con el tipo de incidencia más sencillo, pues la dirección de propagación de la onda es perpendicular a la frontera de los medios. Dicho de

otro modo, el campo eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí, pero al mismo tiempo, paralelos al plano frontera entre los medios. Partiendo de la figura 3.4 describiremos este fenómeno.

La onda se propaga en dirección $+z$. Por la regla de la mano derecha, sé que el campo eléctrico de la onda se encuentra en la dirección $+y$ y el campo magnético en la dirección $-x$. Las expresión del campo eléctrico de la onda incidente E_i es

$$\tilde{\mathbf{E}}_i(z) = \mathbf{a}_y E_i e^{-j\beta_1 z}$$

y el campo magnético H_i es

$$\tilde{\mathbf{H}}_i(z) = -\mathbf{a}_x \frac{E_i}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}$$

Para simplificar las expresiones, vamos a asumir que el medio 1 es sin pérdidas, por tanto, $k_i = \mathbf{a}_z \beta_1$. η_1 se define como la impedancia intrínseca del medio 1.

Cuando la onda choca con la frontera de los medios, una parte se transmite en la misma dirección y sentido de la incidente, y la otra se refleja en la misma dirección pero en sentido opuesto. Podemos usar distintas notaciones, siempre que se cumplan las descripciones. Como estamos trabajando sobre la obra de Elliot, diré que el campo eléctrico E_t de la onda transmitida es

$$\tilde{\mathbf{E}}_t(z) = \mathbf{a}_y E_t e^{-jk_2 z}$$

y el campo magnético H_t es

$$\tilde{\mathbf{H}}_t(z) = -\mathbf{a}_x \frac{E_t}{\eta_2} e^{-jk_2 z}$$

donde η_2 se define como la impedancia intrínseca del medio 2.

Finalmente, el campo eléctrico E_r de la onda reflejada es:

$$\tilde{\mathbf{E}}_r(z) = \mathbf{a}_y E_r e^{j\beta_1 z}$$

y el campo magnético H_r es

$$\tilde{\mathbf{H}}_r(z) = \mathbf{a}_x \frac{E_r}{\eta_1} e^{j\beta_1 z}$$

Definidas las ecuaciones de onda, relacionemos las amplitudes de estas. Aplicando las condiciones de contorno en la frontera de ambos medios, se tiene que cumplir que

$$E_i + E_r = E_t$$

para el campo eléctrico, y para el campo magnético:

$$\frac{E_i}{\eta_1} - \frac{E_r}{\eta_1} = \frac{E_t}{\eta_2}$$

Presta atención al signo negativo, pues le hemos dado la vuelta al campo magnético reflejado.

Definimos ahora el **coeficiente de reflexión**, es la relación entre la amplitud de la onda reflejada y la incidente,

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_i}$$

y el **coeficiente de transmisión**, entre la amplitud de la onda transmitida y la incidente,

$$\tau = \frac{E_t}{E_i}$$

Despejando E_r y E_t en las expresiones del coeficiente, y sustituyéndolas en el criterio que relaciona las amplitudes de los campos eléctricos, obtengo:

$$E_i + \Gamma E_i = \tau E_i \iff E_i(1 + \Gamma) = \tau E_i \iff 1 + \Gamma = \tau$$

y en la de los campos magnéticos:

$$\frac{E_i}{\eta_1} - \frac{\Gamma E_i}{\eta_1} = \frac{\tau E_i}{\eta_2} \iff \frac{E_i}{\eta_1}(1 - \Gamma) = \tau \frac{E_i}{\eta_2} \iff 1 - \Gamma = \tau \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

Igualando τ obtengo la siguiente definición del coeficiente de reflexión en función de las impedancias intrínsecas del medio.

$$(1 - \Gamma) \frac{\eta_2}{\eta_1} = \tau = 1 + \Gamma \iff \frac{\eta_2}{\eta_1} - \Gamma \frac{\eta_2}{\eta_1} = 1 + \Gamma \iff \frac{\eta_2}{\eta_1} - 1 = \Gamma + \Gamma \frac{\eta_2}{\eta_1} \iff$$

$$\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1} = \frac{\Gamma \eta_1 + \Gamma \eta_2}{\eta_1} \iff \eta_2 - \eta_1 = \Gamma(\eta_1 + \eta_2) \iff \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \Gamma$$

Igualando Γ obtengo la siguiente definición del coeficiente de transmisión en función de las impedancias intrínsecas del medio.

$$1 - \tau \frac{\eta_1}{\eta_2} = \Gamma = \tau - 1 \iff 1 + 1 = \tau + \tau \frac{\eta_1}{\eta_2} \iff 2 = \tau \left(\frac{\eta_2 + \eta_1}{\eta_2} \right) \iff \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \tau$$

Vamos a abordar la energía de la onda. La densidad de potencia de la onda incidente viene descrita por la siguiente expresión matemática:

$$\overline{|\mathcal{P}_i|} = \frac{|E_i|^2}{2\eta_1}$$

La suma de la densidad de potencia de la onda reflejada y transmitida nos dará la densidad de la onda incidente. Para ello, partiendo de

$$\overline{|\mathcal{P}_t|} + \overline{|\mathcal{P}_r|} = \frac{|E_t|^2}{2\eta_2} + \frac{|E_r|^2}{2\eta_1}$$

y despejando E_t y E_r en las definiciones de los coeficientes de transmisión y reflexión respectivamente y sustituyendo en estas τ y Γ con las definiciones en función de las impedancias intrínsecas de los medios, y sustituyendo y simplificando en la expresión anterior, obtengo que

$$\overline{|\mathcal{P}_t|} + \overline{|\mathcal{P}_r|} = \frac{|E_i|^2}{2\eta_1} \left[\left(\frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \right)^2 \frac{1}{\eta_2} + \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \right)^2 \frac{1}{\eta_1} \right] \iff \overline{|\mathcal{P}_t|} + \overline{|\mathcal{P}_r|} = \frac{|E_i|^2}{2\eta_1} = \overline{|\mathcal{P}_i|}$$

Hasta ahora hemos entendido el comportamiento de la incidencia de una onda en los puntos de interferencia de dos medios dieléctricos. ¿Cómo funcionará la incidencia cuando pasamos de un entorno dieléctrico sin pérdidas a un conductor perfecto?

A medida que la conductividad del medio sobre el que incide la onda aumenta, o la frecuencia de la onda disminuye, podemos encontrarnos con situaciones en el que el coeficiente de reflexión $\Gamma \approx -1$. En los medios conductores han de cumplirse dos requisitos para cumplir con las leyes de la física:

- Los campos eléctricos en un conductor perfecto ha de ser nulo.
- Los campos eléctricos tangenciales han de ser continuos en la superficie de separación.

Con esos criterios en mente, la única manera en la que puede cumplirse que los campos eléctricos tangenciales sean nulos es si la magnitud de la onda incidente y la reflejada es la misma, pero con un desfase de π radianes tal que se cancelen uno con el otro, creando un campo eléctrico tangencial nulo. De hecho, es lo que $\Gamma = -1$ significa.

No solo eso, por la relación de $1 + \Gamma = \tau$, con $\Gamma = -1$ obtengo que $\tau = 0$, lo que significa que, en un conductor perfecto, la amplitud de la onda transmitida es cero.

En esta situación, la amplitud del campo magnético de la onda reflejada es $-\Gamma = +1$, por tanto,

$$\tilde{\mathbf{H}}_r(z) = (-\Gamma)\mathbf{a}_x \frac{E_r}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z} = \mathbf{a}_x \frac{E_r}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}$$

Para que las leyes de la física no sean violadas, considerando que la profundidad de penetración $\delta = 0$ y la conductividad es infinita $\sigma \Rightarrow \infty$ en los conductores perfectos, la densidad de corriente superficial en la superficie de separación de ambos medios es

$$\tilde{\mathbf{J}}_s = |\tilde{\mathbf{H}}_i + \tilde{\mathbf{H}}_r|_{\mathbf{a}_y} = \frac{2E_i}{\eta_1} \mathbf{a}_y$$

En el caso de los buenos conductores, la corriente es distribuida a lo largo de un volumen determinado por la profundidad de penetración δ . El campo eléctrico propagado en el conductor, la onda transmitida, se atenúa rápidamente

$$\tilde{\mathbf{E}}_t(z) = \mathbf{a}_y E_t e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z}$$

donde $\alpha_2 = \beta_2 = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$. La densidad de corriente volúmica determinado por el campo eléctrico de la onda transmitida tendrá que ser:

$$\tilde{\mathbf{J}}_v(z) = \sigma \tilde{\mathbf{E}}_t(z) = \sigma \mathbf{a}_y E_t e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z}$$

La corriente que encontramos en la superficie en los buenos conductores vendrá determinado por la siguiente expresión matemática:

$$\tilde{\mathbf{J}}_{int} = \int_0^\infty \tilde{\mathbf{J}}_v(z) dz = \mathbf{a}_y \frac{\sigma E_t}{\alpha_2 + j\beta_2}$$

Aunque, con $\alpha_2 = \beta_2 = \sqrt{\pi \mu \sigma / 2}$ y $\eta_2 = \sqrt{\omega \mu / (2\omega)}(1 + j)$, la expresión se simplifica en:

$$\tilde{\mathbf{J}}_{int} = \int_0^\infty \tilde{\mathbf{J}}_v(z) dz = \mathbf{a}_y \frac{E_t}{\eta_2}$$

Si limitamos ahora el valor de la densidad de corriente superficial integrada, con $E_t = \tau E_i$ obtenemos $\tau = 2\eta_2 / (\eta_1 + \eta_2)$, su valor se acerca a un valor finito:

$$\tilde{\mathbf{J}}_{int} = \mathbf{a}_y \frac{2E_i}{\eta_1 + \eta_2}$$

Como $\eta_2 \ll \eta_1$, y σ un valor muy grande no infinito, tenemos que:

$$\tilde{\mathbf{J}}_{int} \approx \mathbf{a}_y \frac{2E_i}{\eta_1}$$

Toda esta demostración la hemos realizado para determinar que, en buenos conductores, podremos trabajar directamente con el concepto de densidad de corriente superficial, sin perder de vista que, una descripción más precisa de la densidad de corriente es más complicada.

Finalmente, sabemos que la onda transmitida es absorbida completamente por el conductor siempre que el ancho del conductor sea unas cuantas veces mayor que la profundidad de penetración $\delta = 1/\alpha = 1/\sqrt{\pi f \mu \sigma}$. La potencia que absorbe el conductor viene descrita por la siguiente expresión matemática:³

$$\overline{P_s^{abs}} = \frac{1}{2} \Re \{ |J_S|^2 Z_S \} = \frac{1}{2} |J_S|^2 R_S$$

donde Z_S se define como la impedancia de la superficie

$$Z_S \equiv \frac{E_t}{J_S} = R_S + jX_S$$

y R_S como la resistencia superficial

$$R_S = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}$$

3.7.2. Incidencia oblicua

No siempre nuestras ondas van a incidir formando un ángulo de 90° con las fronteras de los medios. Cuando estas inciden con un ángulo distinto, la dirección de la onda reflejada y transmitida se alteran, influenciando la amplitud y polarización de las ondas.

Distinguiamos dos casos de incidencia oblicua para ondas electromagnéticas:

- **Transverse Electric (s-polarized wave)**, el campo eléctrico es completamente tangencial a la superficie y el campo magnético tiene un componente tangencial y un componente en la dirección z .
- **Transverse Magnetic (p-polarized wave)**, en esencia, lo opuesto, campo magnético tangencial a la superficie y el campo eléctrico con componente tangencial y un componente en la dirección de propagación.

TE

Vamos a empezar describiendo las ondas TE. El campo eléctrico de la figura 3.5 es:

³Incluyo la expresión de la impedancia de la superficie para presentarla, aunque la expresión final que usaremos es $\overline{P_s^{abs}} = \frac{1}{2} |J_S|^2 R_S$

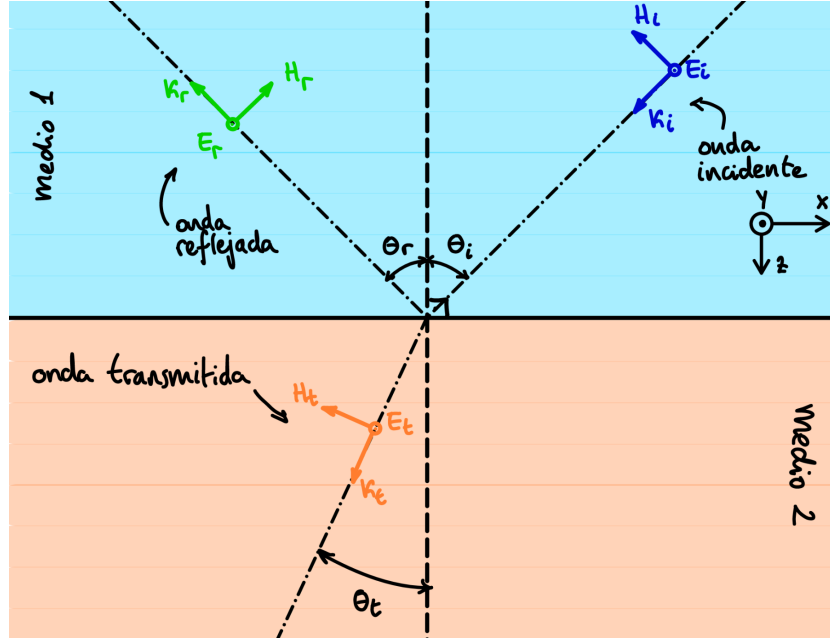


Figura 3.5: Incidencia oblicua de una TE - Elaboración propia

$$\tilde{\mathbf{E}}_i = \mathbf{a}_y E_i e^{-j\mathbf{k}_i \mathbf{r}}$$

El campo magnético $\tilde{\mathbf{H}}_i$ es:

$$\tilde{\mathbf{H}}_i = -\frac{E_i}{\eta_1} (\mathbf{a}_x \cos \theta_i + \mathbf{a}_z \sin \theta_i) e^{-j\mathbf{k}_i \mathbf{r}}$$

y el vector de propagación es:

$$\mathbf{k}_i = \kappa_i (\mathbf{a}_z \cos \theta_i - \mathbf{a}_x \sin \theta_i)$$

donde $\kappa_i = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$. El ángulo θ_i recibe el nombre de **ángulo de incidencia** y es el ángulo entre el vector de propagación $\mathbf{k}_i$ y la normal de la superficie de separación⁴.

Las expresiones de las ondas propagadas son las siguientes para el campo eléctrico, magnético y vector de propagación respectivamente:

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \mathbf{a}_y E_t e^{-j\mathbf{k}_t \mathbf{r}}$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_t = -\frac{E_t}{\eta_2} (\mathbf{a}_x \cos \theta_t + \mathbf{a}_z \sin \theta_t) e^{-j\mathbf{k}_t \mathbf{r}}$$

⁴En incidencia normal, el ángulo de incidencia θ_i era 0

$$\mathbf{k}_t = \kappa_t(\mathbf{a}_z \cos \theta_t - \mathbf{a}_x \sin \theta_t)$$

donde $\kappa_t = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$ y θ_t definida como el **ángulo de refracción** (ángulo entre el vector $\mathbf{k}_t$) y la normal de la superficie de separación.

Si la onda se propaga de un medio con ε_1 a otro con ε_2 , cumpliéndose que $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, el ángulo θ_t se aproxima hacia la normal. En caso contrario, se aleja de esta.

Las ecuaciones de onda para la reflejada corresponden a la siguiente:

$$\tilde{\mathbf{E}}_r = \mathbf{a}_y E_r e^{-j\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}}$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_r = \frac{E_r}{\eta_1}(\mathbf{a}_x \cos \theta_r - \mathbf{a}_z \sin \theta_r) e^{-j\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}}$$

$$\mathbf{k}_r = -\kappa_r(\mathbf{a}_z \cos \theta_i + \mathbf{a}_x \sin \theta_i)$$

cumpliendo que $\kappa_r = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} = \kappa_i$ y siendo θ_r definida como **ángulo de reflexión**.

Aplicando las condiciones de contorno en la superficie de separación ($z = 0$) obtenemos que:

$$E_i e^{j\kappa_i \sin \theta_i x} + E_r e^{j\kappa_r \sin \theta_r x} = E_t e^{j\kappa_t \sin \theta_t x}$$

vemos que se tiene que cumplir que $\kappa_i \sin \theta_i = \kappa_r \sin \theta_r = \kappa_t \sin \theta_t$ para que simplificando obtengamos la relación de amplitudes para los campos eléctricos que vimos anteriormente.

Ahora, centrándonos en la igualdad $\kappa_i \sin \theta_i = \kappa_r \sin \theta_r$ y sabiendo que $\kappa_i = \kappa_r$, obtengo que $\sin \theta_i = \sin \theta_r$, es decir que, $\theta_i = \theta_r$. Obtengo así la **Ley de Reflexión**:

$$\theta_i = \theta_r$$

Sabemos que de la igualdad $\kappa_i \sin \theta_i = \kappa_t \sin \theta_t$, $\kappa_i \neq \kappa_t$, porque estas dependen de las propiedades de los medios. A raíz de esa igualdad, obtengo lo que se llama la **Ley de Snell de la refracción**:

$$\kappa_i \sin \theta_i = \kappa_t \sin \theta_t$$

Dividiendo la expresión de igualdad de las amplitudes de los campos eléctricos entre E_i y usando $\Gamma = E_r/E_i$ y $\tau = E_t/E_i$, tengo que:

$$1 + \Gamma = \tau$$

Aplicando las condiciones de contorno para los campos magnéticos, obtengo que (ver anotación ⁵):

$$-\frac{E_i}{\eta_1} \cos \theta_i + \frac{E_r}{\eta_1} \cos \theta_r = -\frac{E_t}{\eta_2} \cos \theta_t$$

Dividiendo esta expresión entre E_i/η_1 obtengo que:

$$1 - \Gamma = \tau \frac{\eta_1 / \cos \theta_i}{\eta_2 / \cos \theta_t}$$

Despejando las expresiones $1 + \Gamma = \tau$ y $1 - \Gamma = \tau \frac{\eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t}$ en función de τ , obtengo que:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 \sec \theta_t - \eta_1 \sec \theta_i}{\eta_2 \sec \theta_t + \eta_1 \sec \theta_i}$$

Despejando Γ en $1 + \Gamma = \tau$ obtengo $\tau = 1 + \frac{\eta_2 \sec \theta_t - \eta_1 \sec \theta_i}{\eta_2 \sec \theta_t + \eta_1 \sec \theta_i}$.

Estas expresiones se pueden simplificar usando un concepto llamado **impedancia de una onda**. Para las ondas TE se define como:

$$Z_{TE,i} = \frac{E_i}{H_{i,x}} = \eta_1 \sec \theta_i$$

$$Z_{TE,t} = \frac{E_t}{H_{t,x}} = \eta_2 \sec \theta_t$$

y la expresión de Γ quedaría como:

$$\Gamma = \frac{Z_{TE,t} - Z_{TE,i}}{Z_{TE,t} + Z_{TE,i}}$$

¿Cuándo alcanza $|\Gamma| = 1$? Se cumple que sí $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, $|\Gamma| = 1$ cuando $\theta_i = 90^\circ$. Pero cuando $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, $|\Gamma| = 1$ para cualquier ángulo mayor que el **ángulo crítico** θ_c , cuyo valor es:

$$\theta_c = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

Cuando $\theta_i = \theta_c$ se da lugar a un fenómeno llamado *reflexión interna total*, en el que θ_t forma un ángulo de 90° con la normal, y se propaga justo en la superficie de separación de ambos medios. Si $\theta_i > \theta_c$, se produce una reflexión total de la onda.

Aun así, eso no significa que no habrá ningún campo en el segundo medio. Ciertamente, no habrá una onda propagándose, pero sí un campo eléctrico

⁵ $H_{i,x} = -\frac{E_i}{\eta_1}$, $H_{r,x} = \frac{E_r}{\eta_1}$, $H_{t,x} = -\frac{E_t}{\eta_2}$

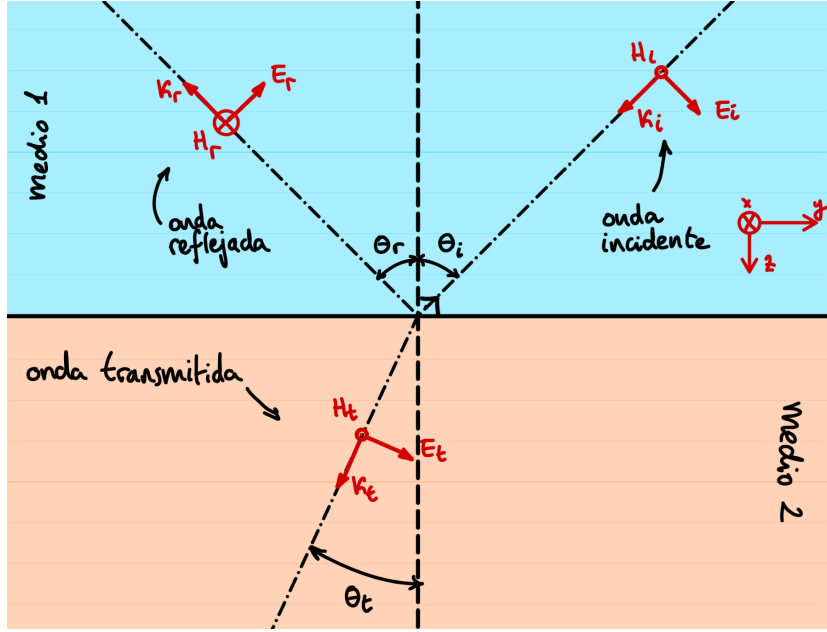


Figura 3.6: Incidencia oblicua de una TM - Elaboración propia

tangencial en el segundo medio. Este campo eléctrico viene descrito por la siguiente expresión:

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \mathbf{a}_y E_t e^{-j\mathbf{k}_{t,x}x} e^{-\alpha z}$$

donde $\alpha = \sqrt{\kappa_{t,x}^2 - \omega^2 \varepsilon_2 \mu_2}$. Sabiendo que $\theta_t = 90^\circ$, se verifica que

$$\kappa_i \sin \theta_i = \kappa_t = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \theta_i$$

entonces $\alpha = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_i - \varepsilon_2 \mu_2}$.

Como la función muestra una modulación senoidal en x y una caída exponencial en z , esta onda recibirá el nombre de **onda evanescente** y solo existe a corta distancia de la superficie de separación (α^{-1}). El valor mínimo de α es 0, y solo se dará cuando $\theta_i = \theta_c$. El máximo valor de α es $\omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2}$, que se produce cuando θ_i se aproxima a los 90° respecto a la normal.

TM

El segundo caso de incidencia oblicua son las ondas TM, son aquellas cuyo campo magnético es tangencial a la superficie de separación. El campo eléctrico viene definido por la siguiente expresión matemática:

$$\tilde{\mathbf{E}}_i = E_i(\mathbf{a}_y \cos \theta_i + \mathbf{a}_z \sin \theta_i)e^{-j\mathbf{k}_i \mathbf{r}}$$

y la del campo magnético tangencial es:

$$\tilde{\mathbf{H}}_i = -\mathbf{a}_x \frac{E_i}{\eta_1} e^{-j\mathbf{k}_i \mathbf{r}}$$

El vector de propagación de la onda incidente es:

$$\mathbf{k}_i = \kappa_i(-\mathbf{a}_y \sin \theta_i + \mathbf{a}_z \cos \theta_i)$$

siendo $\kappa_i = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$, igual que para las ondas TE.

El campo eléctrico de la onda transmitida es:

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = E_t(\mathbf{a}_y \cos \theta_t + \mathbf{a}_z \sin \theta_t)e^{-j\mathbf{k}_t \mathbf{r}}$$

el campo magnético:

$$\tilde{\mathbf{H}}_t = -\mathbf{a}_x \frac{E_t}{\eta_2} e^{-j\mathbf{k}_t \mathbf{r}}$$

y el vector de propagación:

$$\mathbf{k}_t = \kappa_t(-\mathbf{a}_y \sin \theta_t + \mathbf{a}_z \cos \theta_t)$$

siendo $\kappa_t = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$.

Finalmente, el campo eléctrico de la onda reflejada es:

$$\tilde{\mathbf{E}}_r = E_r(\mathbf{a}_y \cos \theta_r - \mathbf{a}_z \sin \theta_r)e^{-j\mathbf{k}_r \mathbf{r}}$$

el campo magnético:

$$\tilde{\mathbf{H}}_r = \mathbf{a}_x \frac{E_r}{\eta_1} e^{-j\mathbf{k}_r \mathbf{r}}$$

con un vector de propagación:

$$\mathbf{k}_r = -\kappa_r(\mathbf{a}_y \sin \theta_i + \mathbf{a}_z \cos \theta_i)$$

donde $\kappa_r = \kappa_i$.

Siguiendo las mismas leyes de reflexión y refracción de las ondas TE, determino que el coeficiente de reflexión Γ es:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$$

El coeficiente de refracción puedo sacarlo con facilidad usando la siguiente relación $1 + \Gamma = \tau \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$ o $1 - \Gamma = \tau \frac{\eta_1}{\eta_2}$.

Relaciono ideas

Cuando $\theta_i = 0$, la expresión de Γ para TM coincide con la de la incidencia normal.

El comportamiento de las TM cuando $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ es la misma que en las ondas TE, dándose también los ángulos críticos y la constante de decaimiento α .

Al igual que en TE, vamos a simplificar la expresión de Γ usando las impedancias de onda. Defino para la onda incidente:

$$Z_{TM,i} = \frac{E_{i,y}}{H_i} = \eta_1 \cos \theta_i$$

y para la transmitida:

$$Z_{TM,t} = \frac{E_{t,y}}{H_t} = \eta_2 \cos \theta_t$$

Simplificando la expresión de Γ como:

$$\Gamma = \frac{Z_{TM,t} - Z_{TM,i}}{Z_{TM,t} + Z_{TM,i}}$$

Finalmente, introducimos un concepto que solamente podemos encontrar en las ondas TM, el **ángulo de Brewster** θ_B , el ángulo que hace que $\Gamma = 0$ y cambie de signo. Este ángulo lo podemos obtener usando la siguiente expresión:

$$\theta_B = \tan^{-1} \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1}$$

válido para medios no magnéticos.

¿Por qué no encontramos ángulos de Brewster en TE?

En esencia, para que la reflexión sea nula, el numerador de la expresión $\Gamma = \frac{\eta_2 \sec \theta_t - \eta_1 \sec \theta_i}{\eta_2 \sec \theta_t + \eta_1 \sec \theta_i}$ ha de ser cero $\eta_2 \sec \theta_t - \eta_1 \sec \theta_i = 0 \iff \eta_2 \sec \theta_t = \eta_1 \sec \theta_i$. Sustituyendo las impedancias y asumiendo medios no magnéticos obtengo que $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_2} \cos \theta_i = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_1} \cos \theta_t$. Simplificando la expresión y elevando al cuadrado para simplificar el álgebra tengo que $\varepsilon_1 \cos^2 \theta_i = \varepsilon_2 \cos^2 \theta_t$. Ahora, la ley de Snell ha de verificarse $\sqrt{\varepsilon_1 \mu_0} \sin \theta_i = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_0} \sin \theta_t$. Ahora, si igualamos las ecuaciones obtengo que $\varepsilon_1(\cos^2 \theta_i + \sin^2 \theta_i) = \varepsilon_2(\cos^2 \theta_t + \sin^2 \theta_t)$. Sustituyendo las identidades trigonométricas obtengo que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, dicho de otro modo, el primer medio y el segundo ha de ser el mismo. Más simplificado, no hay cambio de medio, por tanto, no hay fenómenos de incidencia.

3.8. Ondas estacionarias

Cuando una onda incide sobre una superficie, parte de la onda es parcial o completamente reflejada. El campo total presente en el lado incidente será la superposición de ambas ondas, dando lugar a una onda estacionaria. En este apartado nos centraremos en el estudio de sus propiedades cuando la onda incidente incide normalmente sobre la superficie ($\theta_i = 0$).

Comencemos definiendo las ecuaciones de onda en función del espacio y tiempo. Para el campo eléctrico que incide definiré:

$$\mathbf{E}_i(z, t) = \mathbf{a}_y \Re [E_i e^{-j\beta_1 z} e^{j\omega t}]$$

y para la reflejada:

$$\mathbf{E}_r(z, t) = \mathbf{a}_y \Re [E_r e^{+j\beta_1 z} e^{j\omega t}]$$

Sabemos que el campo total presente en el primer medio será la suma de ambas:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i(z, t) + \mathbf{E}_r(z, t) = \mathbf{a}_y \Re [E_i e^{-j\beta_1 z} e^{j\omega t} + E_r e^{+j\beta_1 z} e^{j\omega t}]$$

Factorizando y usando la relación $E_r = \Gamma E_i$ obtengo:

$$\mathbf{E}_1(z, t) = \mathbf{a}_y \Re [E_i (e^{-j\beta_1 z} + \Gamma e^{+j\beta_1 z}) e^{j\omega t}]$$

Para obtener la amplitud del campo eléctrico resultante a lo largo de cualquier punto de z nos lo dará la siguiente expresión:

$$E_1(z) = E_i (e^{-j\beta_1 z} + \Gamma e^{+j\beta_1 z})$$

en esencia, hemos quitado la dependencia temporal para quedarnos solo con la dependencia respecto a z . La función resultante es una periódica, y tiene máximos y mínimos. Sus máximos se encuentran en los puntos en los que la onda incidente y reflejada coinciden en fase, llegando la amplitud a ser $E_i(1 + |\Gamma|)$. Los mínimos se encontrarán justo cuando ambas ondas se encuentren en un desfase de π radianes, y tendrán una amplitud $E_i(1 - |\Gamma|)$.

Si representásemos gráficamente $E_1(z)$, veríamos un patrón ondulado o rizado". Para cuantificar la magnitud de este rizado, definimos el concepto de *Standing Wave Ratio* o *SWR* como la relación entre el valor máximo y mínimo que toma la onda, es decir, un número que nos dice cuánto sube y baja la onda:

$$S = \frac{|E_1(z)_{max}|}{|E_1(z)_{min}|} = \frac{E_i(1 + |\Gamma|)}{E_i(1 - |\Gamma|)} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

El valor mínimo que puede tomar la SWR es 1 y el máximo ∞ . Los máximos se encuentran a múltiplos de $\lambda/2$ y los mínimos a $\lambda/4$ de cada máximo.

Interpretar SWR

Cuando el valor es mínimo, significa que la onda incidente no es reflejada, y cuando es máximo, la onda es reflejada en su totalidad.

Consideremos el caso en que $|\Gamma_1| = |\Gamma_2|$, pero siendo $\Gamma_2 < 0$. El patrón de onda estacionaria resultante para Γ_2 estará invertido espacialmente respecto al de Γ_1 (los máximos de uno coinciden con los mínimos del otro). Sin embargo, es posible hacer coincidir ambos patrones aplicando un desplazamiento espacial de $\lambda/4$.

Hemos visto lo que sucede con los campos eléctricos. Veamos ahora los magnéticos. Definamos las expresiones de campo magnético en función del espacio y tiempo para la onda incidente y reflejada:

$$\mathbf{H}_i(z, t) = -\mathbf{a}_x \Re \left[\frac{E_i}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z} e^{j\omega t} \right]$$

$$\mathbf{H}_r(z, t) = \mathbf{a}_x \Re \left[\Gamma \frac{E_i}{\eta_1} e^{+j\beta_1 z} e^{j\omega t} \right]$$

La expresión de campo magnético total para el medio 1 es:

$$\mathbf{H}_1(z, t) = -\mathbf{a}_x \Re \left[\frac{E_i}{\eta_1} (e^{-j\beta_1 z} - \Gamma e^{+j\beta_1 z}) e^{j\omega t} \right]$$

Esta expresión difiere de la expresión del campo eléctrico $E_1(z, t)$ en los siguientes tres aspectos:

- El campo magnético tiene dirección x , perpendicular a la dirección de $\mathbf{E}$.
- La amplitud de cada onda es E/η_1 .
- La onda incidente y reflejada se restan en las ondas magnéticas y se suman en las ondas eléctricas.

Cómo Γ nos da la ratio de E_r/E_i para las amplitudes del campo eléctrico y $-H_r/H_i$ para los del campo magnético, la diferencia de signo esencialmente indica que, cuando $H_1(z)$ tenga un mínimo, el campo eléctrico es máximo, y viceversa.

Veamos un caso particular. Cuando estamos en casos de reflexión de ondas provocadas porque el segundo medio es un conductor perfecto, es decir, $\Gamma = -1$, obtenemos las siguientes expresiones de campo:

$$\mathbf{E}_1(z, t) = \mathbf{a}_y 2E_i \sin(\beta_1 z) \sin(\omega t)$$

$$\mathbf{H}_1(z, t) = -\mathbf{a}_x 2 \frac{E_i}{\eta_1} \cos(\beta_1 z) \cos(\omega t)$$

y observamos los siguientes fenómenos:

- El campo eléctrico tiene un nodo (punto de amplitud mínima) y el magnético un vientre (punto de amplitud máxima) en la superficie de separación.
- El máximo del campo eléctrico coincide con el mínimo del magnético.
- La SWR de este patrón es infinito.

Finalmente, definimos la expresión de la densidad de potencia de una onda estacionaria como:

$$\overline{\mathcal{P}} = \mathbf{a}_z \frac{|E_i|^2}{2\eta_1} (1 - |\Gamma|^2)$$

Referencias capítulo «Ondas planas»

- [1] D. S. Elliott, *Electromagnetic fields for engineers*. Cambridge: Cambridge University Press, 2025, ISBN: 978-1-009-30944-8 978-1-009-30943-1. DOI: [10.1017/9781009309431](https://doi.org/10.1017/9781009309431)
- [2] *Isotropía*, dic. de 2024. visitado 4 de nov. de 2025. dirección: <https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Isotrop%C3%ADa&oldid=163898147>
- [3] *Campo solenoidal*. visitado 4 de nov. de 2025. dirección: http://tesla.us.es/wiki/index.php/Campo_solenoidal
- [4] *efecto Doppler* — *Sociedad española de astronomía*. visitado 27 de nov. de 2025. dirección: <https://www.sea-astronomia.es/glosario/efecto-doppler>
- [5] *FIGURE 2. a) Polarización circular derecha (R). b) Polarización...* en. visitado 14 de nov. de 2025. dirección: https://www.researchgate.net/figure/a-Polarizacion-circular-derecha-R-b-Polarizacion-circular-izquierda-L-c_fig2_367165241

Resumen elaborado por Alexandru Theodor Muntenas² durante el curso académico 2025 - 2026.