

Capítulo 2

Ecuaciones de Maxwell

Este capítulo se basa en la estructura y el rigor de la obra "*Electromagnetic Fields for Engineers*" de Daniel S. Elliot [1]. Se recomienda la consulta de la obra original para un estudio exhaustivo.

Tenemos que tener en cuenta que, sin James Clerk Maxwell, las Telecomunicaciones no serían lo que son hoy en día. Nacido en Edimburgo en 1831, este matemático y científico británico hizo su mayor contribución con las denominadas **Ecuaciones de Maxwell**.

Maxwell logró algo histórico. Al introducir los conceptos de campo y corriente de desplazamiento, logró unificar la electricidad y el magnetismo en un solo concepto, el campo electromagnético.

Este conjunto de ecuaciones, que reúne las formulaciones de Charles-Augustin de Coulomb, Carl Friederich Gauss, André-Marie Ampère y Michael Faraday, entre otros, permite estudiar con precisión todos los fenómenos electromagnéticos, desde motores eléctricos y lentes hasta comunicaciones inalámbricas. [2]

2.1. Densidad de corriente de desplazamiento

Hasta ahora, las leyes estudiadas describen con precisión el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos. Sin embargo, se produce una inconsistencia en un detalle muy específico.

Las ecuaciones de Maxwell reúnen la Ley de Gauss (para campos eléctricos y magnéticos), la Ley de Faraday y la Ley de Ampère. Fue precisamente en la última, la Ley de Ampère. En la última, Maxwell observó una discrepancia que desafiaba el principio de conservación de la carga. En breves nos centraremos en ello.

2.1.1. Las ecuaciones de Maxwell hasta ahora

Pero antes, vamos a listar cómo serían las ecuaciones de Maxwell sin las modificaciones realizadas por el autor:

Sobre la notación

Para evitar confusiones, en este apartado utilizaremos:

- El **campo de desplazamiento eléctrico** (D) en lugar del campo eléctrico (E) para incluir directamente los efectos de la polarización en materiales. ($D \equiv \epsilon_0 E + P$, siendo P la densidad de polarización). [3].
- La **intensidad del campo magnético** (H) en lugar de la densidad de flujo magnético (B) para la Ley de Ampère. Formalmente, B es la inducción magnética y H es la intensidad. ($H = \frac{1}{\mu_0} B + M$, siendo M el vector de magnetización). [4]

- **Ley de Gauss** $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ o en su forma integral $\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$ — El flujo del campo de desplazamiento eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga libre total (Q) contenida en su interior. ($\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$).
- **Ley de Gauss para el magnetismo** $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ o en su forma integral $\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$ — No existen «monopolos magnéticos». El flujo del campo magnético a través de cualquier superficie cerrada es siempre cero.
- **Ley de Faraday** $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ o en su forma integral $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ — Un campo magnético que varía con el tiempo induce un campo eléctrico.
- **Ley de Ampère** $\nabla \times \mathbf{H} = J_v$ o en su forma integral $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ — La circulación de la intensidad del campo magnético en un contorno cerrado es proporcional a la densidad de corriente eléctrica real (J_v) que lo atraviesa. ($\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$).

Finalmente, la ecuación de continuidad $\nabla \cdot J_v + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$ especifica la conservación de las cargas.

2.1.2. Problemas con la Ley de Ampère

Maxwell observó que la Ley de Ampère solo se confirmaba en los casos en los que el campo magnético es constante o el flujo de corriente estacionario.

Para solventarlo, Maxwell introdujo el concepto de *corriente de desplazamiento* para justificar que los campos magnéticos no solo surgen en régimen de flujo de corriente estacionario, sino también cuando el campo eléctrico varía con el tiempo, aun en la ausencia de corrientes eléctricas convencionales.

De esta forma, la ley de Ampère $\nabla \times \mathbf{H} = J_v$ se reescribiría como:

$$\nabla \times \mathbf{H} = J_v + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Nota aclaratoria sobre «corrientes eléctricas convencionales»

«La corriente eléctrica es el flujo de carga eléctrica que recorre un material. También se puede definir como un flujo de partículas cargadas, como electrones o iones, que se mueven a través de un conductor eléctrico o un espacio.» [5]

Nota aclaratoria sobre el «flujo de corriente de desplazamiento»

«Una corriente de desplazamiento es una cantidad que está relacionada con un campo eléctrico que varía en el tiempo. Esto puede ocurrir en el vacío o en un dieléctrico donde existe el campo eléctrico.» [6]

La expresión diferencial de la Ley de Ampère-Maxwell, con la ayuda de la Ley de Stokes, se reescribirá de la siguiente forma integral:

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = I + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{s}$$

2.1.3. Las ecuaciones de Maxwell en su forma completa

Finalmente, nuestras ecuaciones de Maxwell quedan reescritas como:

Habiendo corregido la ley de Ampère con la aportación de Maxwell, ahora tenemos que ver cómo afecta este cambio en los campos que hemos estudiado hasta la fecha.

El cambio de Maxwell aporta la posibilidad de que los campos eléctricos puedan variar con el tiempo.

Cuadro 2.1: Ecuaciones de Maxwell en su completas

LEY	FORMA DIFERENCIAL	FORMA INTEGRAL
Ley de Gauss	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$	$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$
No hay cargas magnéticas	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
Ley de Faraday	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = I + \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$
Ley de Ampère-Maxwell	$\nabla \times \mathbf{H} = J_V + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$

2.2. Funciones potenciales para campos variables en el tiempo

Recordemos que, en los regímenes estáticos, definíamos los campos a través de dos potenciales: el campo eléctrico mediante su potencial escalar, $\mathbf{E} = -\nabla V$, y el campo magnético mediante su potencial vectorial, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

La existencia de $\mathbf{A}$ se justifica porque la Ley de Gauss para el magnetismo ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) es siempre válida, permitiendo la relación intrínseca $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Sin embargo, las cosas cambian para el potencial eléctrico cuando estamos hablando de campos variables en el tiempo.

Según la ley de Faraday, los campos eléctricos ya no son irrotacionales:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Para recuperar una función potencial que se pueda derivar de un escalar (como V), introducimos la expresión del potencial vectorial $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A})$$

Reordenando la ecuación obtenemos:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Es decir, $\mathbf{E}$ sigue siendo rotacional, pero $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ no lo es, así que podemos definir una función potencial para esta función:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

Despejando $\mathbf{E}$, obtenemos la nueva expresión fundamental para el campo eléctrico en el régimen dinámico, que ahora depende de ambos potenciales:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

2.3. CONDICIONES DE CONTORNO PARA CAMPOS VARIABLES EN EL TIEMPO 5

Y ahora, integrando esta nueva relación, junto con la ley de Gauss y la de Ampère-Maxwell, justificado por una contundente demostración (páginas 301 a 302 [1]), obtenemos las siguientes funciones para el potencial eléctrico y magnético, respectivamente:

$$V(t, r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_v \frac{\rho_v(t', r')}{|r - r'|} dV'$$

$$A(t, r) = \frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{J_v(t', r')}{|r - r'|} dV'$$

donde el tiempo retardado t' se define como $t' = t - \sqrt{\epsilon\mu}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Las expresiones V y $\mathbf{A}$ se denominan **potenciales retardados** porque la información de la fuente llega al observador un tiempo después (el tiempo que tarda la onda en viajar).

2.3. Condiciones de contorno para campos variables en el tiempo

De forma muy resumida, las condiciones de contorno en el punto de interferencia de dos medios en la siguiente tabla:

Cuadro 2.2: Condiciones de Contorno en Medios Dieléctricos y Conductores Perfectos (PEC)

Componente	Medio General (Medios 1 y 2)	Dieléctrico / Dieléctrico	Dieléctrico / PEC
E Tangencial	$E_{1,t} = E_{2,t}$	$E_{1,t} = E_{2,t}$	$E_{1,t} = E_{2,t} = 0$
H Tangencial	$H_{1,t} - H_{2,t} = J_s$	$H_{1,t} = H_{2,t}$	$H_{1,t} = J_s, H_{2,t} = 0$
D Normal	$D_{1,n} - D_{2,n} = \rho_s$	$D_{1,n} = D_{2,n}$	$D_{1,n} = \rho_s, D_{2,n} = 0$
B Normal	$B_{1,n} = B_{2,n}$	$B_{1,n} = B_{2,n}$	$B_{1,n} = B_{2,n} = 0$

A continuación...

En este capítulo, hemos completado el desarrollo de las **Ecuaciones de Maxwell** al introducir el crucial concepto de la **corriente de desplazamiento**, lo que permitió la unificación del electromagnetismo clásico.

Hemos redefinido los campos dinámicos a través de los potenciales vectoriales ($\mathbf{A}$) y escalares (V), estableciendo la nueva expresión unificada $\mathbf{E} =$

$-\nabla V - \partial \mathbf{A} / \partial t$. Es importante destacar que las **condiciones de contorno** que rigen los límites entre medios **siguen siendo formalmente las mismas** que para los campos estáticos, aunque ahora las aplicamos a un contexto dinámico (variable en el tiempo).

El concepto de potenciales retardados que hemos presentado, lo estudiaremos con más detalle en el tema sobre antenas.

Mientras tanto, ya estamos listos para empezar a hablar sobre la propagación de ondas, que será introducido en el próximo capítulo.

Referencias capítulo «Ecuaciones de Maxwell»

- [1] D. S. Elliott, *Electromagnetic fields for engineers*. Cambridge: Cambridge University Press, 2025, 1 pág., ISBN: 978-1-009-30944-8 978-1-009-30943-1. DOI: [10.1017/9781009309431](https://doi.org/10.1017/9781009309431).
- [2] *Maxwell's equations*, en *Wikipedia*, Page Version ID: 1309837235, 6 de sep. de 2025. visitado 3 de nov. de 2025. dirección: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Maxwell%27s_equations&oldid=1309837235.
- [3] *Electric displacement field*, en *Wikipedia*, Page Version ID: 1318261954, 22 de oct. de 2025. visitado 3 de nov. de 2025. dirección: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Electric_displacement_field&oldid=1318261954.
- [4] *Magnetic field*, en *Wikipedia*, Page Version ID: 1317171099, 16 de oct. de 2025. visitado 3 de nov. de 2025. dirección: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Magnetic_field&oldid=1317171099.
- [5] *Corriente eléctrica*, en *Wikipedia, la enciclopedia libre*, Page Version ID: 169685557, 26 de sep. de 2025. visitado 3 de nov. de 2025. dirección: https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Corriente_el%C3%A9ctrica&oldid=169685557.
- [6] *Corriente de desplazamiento*, en *Wikipedia, la enciclopedia libre*, Page Version ID: 168622186, 24 de jul. de 2025. visitado 3 de nov. de 2025. dirección: https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Corriente_de_desplazamiento&oldid=168622186.

Resumen elaborado por Alexandru Theodor Muntenas² durante el curso académico 2025 - 2026.